

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی

گرایش نرم افزار

عنوان

مروری بر مهم ترین نتایج بازی دزد و پلیس، مدل کلاسیک و گونه های دیگر

نگارش

عباس محرابیان

استاد راهنما

دکتر محمدعلی صفری

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادر فداکارم
که بر همه مشکلات صبر کردند
تا فرزندانشان بهتر زندگی کنند.

تقدیر و تشکر

از آقای محمدعلی صفری برای راهنمایی‌هایشان تشکر می‌کنم. همراهی فعال ایشان در طول پروژه به من انگیزه لازم را برای ادامه کار می‌داد. از آقایان کسری علیشاهی، سعید اکبری و امیر دانشگر که به من کمک کردند تا با زیبایی‌های ریاضیات و نظریه گراف آشنا شوم نیز ممنونم. از کسانی که نرم‌افزار خوب TeX -پاکی را برای حروف‌چینی متن‌های فارسی تهیه کردند نیز متشکرم. کار آقای عبداللہ محمودیان در تهیه لغت‌نامه‌ای برای معادل‌سازی بسیاری از واژه‌های ترکیبیاتی نیز به من کمک کرد. لازم است از یک موجود مجازی نیز تشکر ویژه‌ای به عمل آورم: اینترنت! که اگر نبود امکان دسترسی به بسیاری از مراجع این پایان‌نامه برایم فراهم نمی‌شد.

چکیده

مسائل جستجو در گراف^۱ غالباً به صورت بازی‌های روی گراف بین یک دزد در حال فرار و چند مأمور پلیس مدل‌سازی می‌شود. هدف پلیس دستگیر کردن دزد است در حالی که هدف دزد اجتناب از دستگیری است. این بازی‌ها که تعقیب و گریز^۲ هم نامیده می‌شوند، در مباحث کنترل، رباتیک، شبکه‌های حسگر و امنیت شبکه کاربردهای عملی دارند. علائق صرفاً تئوریک نیز برای مطالعه این بازی‌ها وجود دارد زیرا ارتباطات جالبی بین آن‌ها و پارامترهایی در نظریهٔ گراف نظیر پهنای درختی^۳ کشف شده است. با تعیین شرایط مختلفی برای محل بازیکنان (روی رئوس یا یال‌ها)، تعریف دستگیری، مرئی بودن یا نبودن و سرعت بازیکنان، گونه‌های مختلفی از این بازی تعریف و مطالعه شده‌اند. در هر یک از این گونه‌ها، دو پارامتر مهم، حداقل تعداد مأمورین لازم برای دستگیری دزد، و زمان لازم برای دستگیری دزد می‌باشند. در کلیهٔ این گونه‌ها، استراتژی پلیس باید تضمین‌شده^۵ باشد، یعنی طوری باشد که دزد هر طور عمل کند بالاخره دستگیر بشود. مقالهٔ کوتاه [FT08] این گونه‌ها را مرور و مراجعی برای مطالعهٔ هر کدام پیشنهاد کرده است. گونه‌ای که در این پایان‌نامه بررسی می‌کنیم، به بازی دزد و پلیس^۶ شهرت دارد. دو ویژگی عمدهٔ این گونه که آن را از بقیه متمایز می‌کند، اول این است که سرعت دزد در آن متناهی است و دوم این که بازیکنان به نوبت بازی می‌کنند. این بازی در ۱۹۷۸ برای اولین بار مطالعه شد و در سال‌های اخیر نیز دوباره مورد توجه قرار گرفته و مقالاتی دربارهٔ آن منتشر می‌شود.^۷

مقالات [Als04] و [Hah07] دو مقالهٔ مروری^۸ نسبتاً جدید در مورد این بازی هستند. هدف این پایان‌نامه این است که خواننده را با بازی آشنا کند، نتایج مهم و کلاسیک به علاوهٔ نتایج جدیدتری که پس از نگارش دو مقالهٔ مذکور منتشر شده‌است و همچنین نتایج به دست آمده در رابطه با چند گونهٔ دیگر از بازی را نیز شامل باشد. امیدوارم که این متن کمک کند تا این بازی جالب که تعریف آن مقدماتی است، به بسیاری از پارامترهای نظریهٔ گراف ارتباط دارد و به نظر من بسیار جای کار دارد را به دانش‌پژوهان ایرانی بشناساند و آغازی بر پژوهش‌های آتی در این زمینه باشد.

1) graph searching problems 2) pursuit-evasion 3) tree-width 4) variant 5) guaranteed 6) cops and robber game

(۷) در سال‌های ۲۰۰۶، ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹ سه کارگاه بین‌المللی در زمینهٔ جستجو در گراف‌ها با عنوان اختصاری GRASTA برگزار شده است

8) survey

فهرست مطالب

۱	آ	مقدمات
۱	۱	تعریف بازی
۲	۲	نمادگذاری
۳	ب	عدد جستجوی گراف‌های کلی
۳	۳	پیچیدگی محاسبه عدد جستجو
۴	۴	کران‌های بالا برای عدد جستجو
۱۱	۵	کران‌های پایین برای عدد جستجو
۱۵	پ	عدد جستجوی گراف‌های خاص
۱۵	۶	گراف‌های ۱-جستجوپذیر
۱۷	۷	گراف‌های مسطح
۱۹	۸	گراف‌های کیلی
۲۰	۹	گراف‌های حاصل ضرب
۲۴	۱۰	گراف‌های نامتناهی
۲۷	ت	زمان جستجوی گراف‌ها
۲۷	۱۱	پیچیدگی محاسبه زمان جستجو
۲۹	۱۲	کران‌هایی برای زمان جستجو
۳۳	ث	گونه‌های دیگر
۳۳	۱۳	دزد سریع‌تر
۳۴	۱۴	دزد نامرئی
۳۹	۱۵	استراتژی‌های تصادفی

۴۲

۴۳

۴۳

۴۳

۱۶ گونه‌های دیگر

ج نتیجه‌گیری

۱۷ جمع‌بندی

۱۸ مسائل باز

فهرست اشکال

۳	۱	یک گراف بازه‌ای
۴	۲	گراف پترسن
۵	۳	مثالی از گراف یالی
۶	۴	مثالی از انقباض
۸	۵	مثال مربوط به قضیه ۴-۱۳
۹	۶	مثالی از انقباض یالی
۱۰	۷	مثالی از کهاد (از [Die05] گرفته شده)
۱۰	۸	گراف های مربوط به قضیه ۴-۲۰
۱۱	۹	چرخ ۵ رأسی
۱۳	۱۰	صفحه فانو
۱۵	۱۱	مثال مربوط به لم ۶-۱
۱۶	۱۲	یک گراف ترتیب‌پذیر
۱۷	۱۳	یک گراف پل‌دار
۱۷	۱۴	یک گراف وتری
۱۸	۱۵	یک گراف مسطح با عدد جستجوی ۳
۱۹	۱۶	مکعب سه بعدی
۲۰	۱۷	مثالی از ضرب دکارتی (از [NN98] گرفته شده)
۲۳	۱۸	مثالی از ضرب رسته‌ای (از [NN98] گرفته شده)
۲۴	۱۹	مثالی از ضرب قوی (از [NN98] گرفته شده)
۲۹	۲۰	گراف ۱-جستجوپذیر با ماکسیمم زمان جستجو
۳۳	۲۱	شبکه ۴ × ۴
۳۵	۲۲	شبکه ۳ × ۳
۳۸	۲۳	یک گراف کرم ابریشم
۴۱	۲۴	گراف مربوط به قضیه ۴-۱۵

بخش آ

مقدمات

۱ تعریف بازی

دو بازیکن دزد و پلیس (متشکل از c مأمور) روی یک گراف همبند، بدون جهت و بدون یال دوگانه این بازی را انجام می‌دهند: ابتدا هر یک از c مأمور پلیس روی یکی از رئوس گراف قرار می‌گیرد و بعد دزد در یکی از رئوس گراف قرار می‌گیرد. سپس بازی که از تعدادی دور تشکیل شده آغاز می‌شود. در هر دور، ابتدا پلیس و سپس دزد حرکت می‌کند. حرکت پلیس بدین صورت است که هر یک از مأمورین یا سر جای خود باقی می‌ماند یا به یکی از رئوس مجاور حرکت می‌کند. اشکالی ندارد که در آغاز یا در حین بازی چند مأمور در یک رأس قرار بگیرند. حرکت دزد نیز بدین صورت است که او می‌تواند در رأس فعلی خود باقی بماند و یا به یک رأس مجاور حرکت کند. در هر لحظه‌ای که دزد و یکی از مأمورین در یک رأس قرار بگیرند، دزد دستگیر شده و بازی خاتمه می‌یابد. بازی با اطلاعات کامل انجام می‌شود، یعنی در طول بازی بازیکنان از مکان مأمورین و دزد اطلاع دارند.

نکته. در برخی از مقالات، گراف بازی را انعکاسی^۹ فرض می‌کنند، یعنی هر رأس را با یک یال به خودش وصل می‌کنند. بدین ترتیب هر رأس مجاور خودش است و در تعریف می‌گویند که در هر دور هر یک از مأمورین و دزد به یک رأس مجاور حرکت می‌کنند. این دو تعریف معادلند.

بازی را می‌توان به صورت طبیعی روی گراف‌های جهت‌دار نیز تعریف کرد. بدین ترتیب که در هر نوبت، هر یک از بازیکنان یا در رأس فعلی باقی می‌ماند یا به کمک یک یال خروجی به رأس دیگری حرکت می‌کند. گراف‌های جهت‌دار کمتر مطالعه شده‌اند ولی نتایج به دست آمده درباره آن‌ها هم در این پایان‌نامه ذکر شده‌است.

تعریف (عدد جستجو ($cn(G)$), search number, cop number). فرض کنید پلیس دارای c مأمور باشد. اگر استراتژی پلیس طوری باشد که به ازای هر دنباله‌ای از حرکات دزد، در نهایت منجر به دستگیری او شود، می‌گوییم پلیس می‌تواند با c مأمور دزد را دستگیر کند. برای هر گراف G ، کم‌ترین تعداد مأمور لازم برای دستگیری دزد، عدد جستجوی G نامیده می‌شود و با $cn(G)$ نمایش داده می‌شود. گراف G را c -جستجوپذیر^{۱۰} می‌خوانیم اگر $cn(G) \leq c$.

چند مثال ببینید:

- هر گراف کامل 1 -جستجوپذیر است، زیرا اگر یک مأمور پلیس از رأس دلخواهی شروع کند و دزد در رأس u قرار بگیرد، در همان حرکت اول مأمور به رأس u می‌رود و دزد را دستگیر می‌کند.
- هر درخت 1 -جستجوپذیر است. مأمور از رأس دلخواهی شروع می‌کند. در هر حرکت مأمور یک گام به سمت دزد حرکت می‌کند. با توجه به این که درخت دور ندارد، دزد هیچ‌گاه نمی‌تواند مأمور را دور بزند و همواره فضای حرکتی‌اش محدودتر می‌شود و پس از حداکثر n دور گیر می‌افتد.

- عدد جستجوی هر دور با بیش از سه رأس برابر 2 است. با یک مأمور نمی‌توان دزد را گرفت زیرا دزد می‌تواند صبر کند تا مأمور به همسایگی او برسد و سپس در جهت مقابل حرکت کند و هرگز گیر نمی‌افتد. از طرف دیگر با دو مأمور می‌توان دزد

9) reflexive 10) c-searchable, c-cop-win

را گرفت. کافی است یکی از مأموران در رأس دلخواهی ثابت بایستد و مأمور دیگر یک دور بچرخد. ♡

گونه‌های دیگر از بازی که در برخی مقالات مورد بررسی قرار گرفته است، بازی فعال^{۱۱} نام دارد و در آن دزد در هر دور مجبور به حرکت است و نمی‌تواند در رأس فعلی خودش باقی بماند. در [NN98] ثابت شده که اختلاف اعداد جستجو در این دو گونه حداکثر ۱ واحد است و لذا به بررسی آن گونه نخواهیم پرداخت.

مطالعه $cn(G)$ و ارتباط آن با سایر پارامترهای گراف یکی از قدیمی‌ترین مسائل این بازی بوده‌است و نتایج زیادی نیز به دست آمده‌است. قسمت ۳ درباره پیچیدگی محاسبه $cn(G)$ از لحاظ الگوریتمی است. در قسمت‌های ۴ و ۵ به ترتیب کران‌های بالا و پایین موجود برای عدد جستجو برحسب سایر پارامترهای گراف معرفی شده‌اند. در قسمت‌های ۶ تا ۱۰ نیز نتایج به دست آمده درباره عدد جستجوی گراف‌های خاص بیان شده‌اند.

مفهوم زمان جستجوی گراف‌ها (حداقل تعداد دورهای لازم برای دستگیری دزد) اخیراً با مقاله [BGHK] معرفی شده‌است. قسمت ۱۱ درباره پیچیدگی محاسبه زمان جستجو از لحاظ الگوریتمی است و در قسمت ۱۲ کران‌هایی برای زمان جستجوی برخی گراف‌ها بیان شده است. در قسمت‌های ۱۳ تا ۱۶ تعدادی از گونه‌های دیگر بازی معرفی شده و نتایج مربوط به آن‌ها نیز مرور می‌شود. در قسمت ۱۷ یک جمع‌بندی از نتایج به دست آمده و حیثه‌هایی که می‌توان در آن‌ها کار کرد مطرح می‌شود و نهایتاً در قسمت ۱۸ برخی از مسائل مهم و باز در این زمینه مطرح می‌شوند که مسیری برای پژوهش‌های آینده معرفی می‌کنند.

۲ نمادگذاری

گراف‌های بررسی شده جز در قسمت ۱۰ همگی متناهی هستند. منظور از G همواره یک گراف n رأسی همبند بدون یال دوگانه است و $E(G), V(G)$ مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها، $\Delta(G), \delta(G)$ کم‌ترین و بیش‌ترین درجه‌ها، $g(G)$ طول کوتاه‌ترین دور گراف G را نشان می‌دهند. منظور از اندازه یک گراف تعداد رئوس آن است. اگر u, v رئوس G باشند، فاصله آن‌ها را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $u \sim v$ اگر این دو رأس مجاور باشند. ماکسیمم فاصله بین دو رأس از G را قطر^{۱۲} گراف G نامیده و با $diam(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر $A, B \subset V(G)$ تعریف می‌کنیم $d(A, B) = \min\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. منظور از $N(u)$ مجموعه رئوس همسایه u است و $N[u] = \{u\} \cup N(u)$. مجموعه رئوسی که فاصله‌شان تا u از r بیشتر نیست را با $N_r[u]$ نشان می‌دهیم. اگر $A \subset V(G)$ ، تعریف می‌کنیم $N_r[A] = \cup_{u \in A} N_r[u]$. یک‌ریخت^{۱۳} بودن دو گراف G, H را به صورت $G \simeq H$ نشان می‌دهیم. اگر H زیرگرافی از G شامل u, v باشد فاصله این دو رأس در H را با $d_H(u, v)$ نشان می‌دهیم. منظور از $G - H$ گراف حاصل از حذف رئوس H از G است. اگر e یالی از G باشد منظور از $G - e$ گراف حاصل از حذف یال e از G است. مسیر، دور و گراف کامل n رأسی را به ترتیب با K_n, C_n, P_n نمایش می‌دهیم.

11) active game 12) diameter 13) isomorphic

عدد جستجوی گراف‌های کلی

۳ پیچیدگی محاسبه عدد جستجو

برای مشاهده تعریف کلاس‌های پیچیدگی (NP و EXP) به [Wik09] مراجعه کنید. پیچیدگی محاسبه عدد جستجوی یک گراف مدت‌ها یک مسئله باز بود تا این که اخیراً NP-hard بودن آن به وسیله ارائه یک کاهش از مسئله مجموعه غالب رأسی^{۱۴} به اثبات رسیده است:

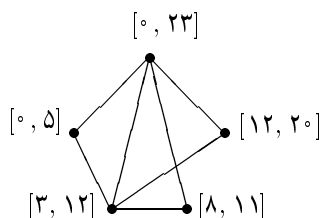
قضیه ۱۰۳ ([FGK08]) برای گراف داده شده G ، محاسبه $cn(G)$ مسئله‌ای NP-hard است.

در همان مقاله با توجه به تقریب‌ناپذیری^{۱۵} مسئله مجموعه غالب رأسی با ضریب لگاریتمی، گزاره زیر نتیجه گرفته شده است:

قضیه ۲۰۳ ([FGK08]) اگر $P \neq NP$ ، آن‌گاه عدد ثابت $c > 0$ موجود است که الگوریتم تقریبی با ضریب $c \log n$ برای محاسبه $cn(G)$ وجود ندارد.

از سوی دیگر، برای برخی گراف‌ها می‌توان عدد جستجو را سریع‌تر محاسبه کرد:

تعریف (گراف بازه‌ای، interval graph). گراف G را یک گراف بازه‌ای می‌خوانیم هرگاه رئوس آن متناظر با بازه‌های روی محور اعداد حقیقی باشند و دو رأس به هم متصل باشند اگر بازه‌های متناظرشان با هم اشتراک داشته باشند. \triangle
مثال. در شکل ۱ یک گراف بازه‌ای که رئوس آن متناظر با بازه‌های $[0, 5]$ ، $[0, 23]$ ، $[3, 12]$ ، $[8, 11]$ ، $[12, 20]$ هستند را مشاهده می‌کنید. \heartsuit



شکل ۱: یک گراف بازه‌ای

قضیه ۳۰۳ ([FGK08]) برای گراف داده شده بازه‌ای G ، محاسبه $cn(G)$ در زمان چندجمله‌ای ممکن است.

چنانچه موقعیت اولیه دزد و مأمورین در ورودی داده شده باشد، تعیین این که آیا دزد قادر به فرار است از نظر الگوریتمی پیچیده است:

قضیه ۴۰۳ ([GR95]) مسئله تصمیم‌گیری که به عنوان ورودی یک گراف و موقعیت اولیه دزد و مأمورین را می‌گیرد و به این پرسش پاسخ می‌دهد که آیا با آغاز از این موقعیت پلیس قادر به دستگیری دزد هست یا خیر، *EXP-complete* است.

14) minimum dominating set problem 15) inapproximability

و درباره بازی روی گرافهای جهتدار نیز قضیه زیر را داریم:

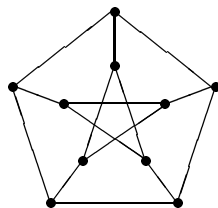
قضیه ۵-۳ ([GR95]) برای گراف جهتدار داده شده G محاسبه $cn(G)$ EXP -complete است حتی اگر G قویاً همبند^{۱۶} باشد. به عنوان یک نتیجه مثبت، ثابت شده است که برای هر عدد ثابت c تعیین این که آیا گراف داده شده G ، c -جستجوپذیر است در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است. (نتیجه ۲-۱۱ را ببینید.)

۴ کرانهای بالا برای عدد جستجو

یکی از مهم‌ترین ایده‌ها برای یافتن کران بالا برای عدد جستجو، استفاده از مفهوم محافظت از یک زیرگراف^{۱۷} است که در انتهای این قسمت به آن خواهیم پرداخت. ابتدا برخی از کران‌هایی که از این ایده استفاده نمی‌کنند را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰-۴ ([AF84]) اگر $\Delta(G) \leq 3$ و هر دو یال مجاور G در دوری به طول حداکثر ۵ قرار داشته باشند، آن گاه $cn(G) \leq 3$.

مثال. اگر P گراف شکل ۲ باشد که به گراف پترسن مشهور است، آن گاه $cn(P) \leq 3$.



شکل ۲: گراف پترسن

در [JKT] درباره خانواده‌های از گراف‌ها مطالعه شده که اگر گرافی آن‌ها را به عنوان زیرگراف (یا زیرگراف القایی) نداشته باشد عدد جستجوی کران‌دار بشود، و نتایج زیر به دست آمده است:

قضیه ۲۰-۴ ([JKT]) برای هر $m > 3$ ، اگر P_m زیرگراف القایی G نباشد آن گاه $cn(G) \leq m - 2$.

قضیه ۳۰-۴ ([JKT]) برای هر $m > 3$ ، اگر C_m زیرگراف القایی G نباشد آن گاه $cn(G) \leq m - 2$.

قضیه ۴۰-۴ ([JKT]) فرض کنید T درختی است که $\Delta(T) = 3$ و T دقیقاً یک رأس u از درجه ۳ دارد و d فاصله دورترین رأس T از u باشد. اگر T زیرگراف G نباشد آن گاه $cn(G) \leq 2d$.

تعریف (گراف یالی $(L(G))$ ، line graph). گراف یالی G که با $L(G)$ نمایش داده می‌شود گرافی است که مجموعه رؤس آن $E(G)$ است و دو رأس به هم وصلند اگر یال‌های متناظرشان در G یک رأس مشترک داشته باشند. Δ
مثال. در شکل ۳ یک گراف ساده و گراف یالی آن را مشاهده می‌کنید. \heartsuit

قضیه ۵-۴ برای هر G داریم $cn(G) \leq 2cn(L(G))$.

16) strongly connected 17) guarding a subgraph



شکل ۳: مثالی از گراف یالی

اثبات. فرض کنید $c = cn(L(G))$. ثابت می‌کنیم با $2c$ مأمور می‌توان دزدی را در G دستگیر کرد. بدین منظور هم‌زمان با بازی روی G یک بازی مجازی روی گراف $L(G)$ با c مأمور انجام می‌دهیم و حرکات برنده مأمورین مجازی روی $L(G)$ را به حرکات مأمورین واقعی روی G نگاشت می‌کنیم و حرکات دزد واقعی روی G را به حرکات دزد مجازی روی $L(G)$ نگاشت می‌کنیم. در نتیجه ثابت می‌شود که عدد جستجوی G از $2c$ بیشتر نیست. به صورت دلخواه به هر مأمور مجازی دو مأمور واقعی نسبت می‌دهیم. چون رئوس $L(G)$ یال‌های G هستند، می‌توان این طور تعبیر کرد که بازی مجازی در واقع روی یال‌های G انجام می‌شود.

در آغاز کار هر یک از مأمورین مجازی روی یکی از یال‌های G قرار می‌گیرد. دو مأمور واقعی متناظر روی دو سر آن یال قرار می‌گیرند. دزد روی یکی از رئوس G قرار می‌گیرد. دزد مجازی روی یکی از یال‌های مجاور آن رأس قرار می‌گیرد. هر دور که یک مأمور مجازی از یالی به یال مجاور حرکت کرد، دو مأمور واقعی متناظرش نیز می‌توانند طوری به رئوس مجاور خود حرکت کنند که در دو سر یال مقصد قرار بگیرند. هر بار که دزد واقعی از رأسی به رأس دیگر حرکت کرد، دزد مجازی می‌تواند طوری حرکت کند که یالی که روی آن است هم‌چنان با رأسی که دزد واقعی در آن است مجاور باشد.

در لحظه‌ای که بازی مجازی به پایان می‌رسد و دزد مجازی دستگیر می‌شود، دزد واقعی روی یک سر یالی است که دزد مجازی روی آن است. چون یک مأمور مجازی دزد مجازی را دستگیر کرده است، دو مأمور واقعی متناظر با این مأمور مجازی در دو سر یالی که دزد مجازی در آن بوده قرار گرفته‌اند، پس دزد واقعی را دستگیر کرده‌اند و درستی استراتژی و کران داده شده به اثبات می‌رسد. \square

قضیه زیر در واقع برای یافتن کران بالای عدد جستجو برای گراف‌های تصادفی مورد استفاده قرار گرفته است.

قضیه ۶.۴ (BKL) فرض کنید c, r اعدادی باشند که برای هر $x \in V(G), S \subset N_r[x]$ نامساوی $10|S| \log n \leq \frac{c}{n} |N_{r+1}[S]|$ برقرار باشد. در این صورت $cn(G) \leq c$.

حال مفهوم انقباض را مطرح می‌کنیم که در این بازی و مخصوصاً برای محافظت از زیرگراف‌ها مفهوم مهمی به شمار می‌آید. **تعریف (انقباض، retract)**. زیرگراف H از G را یک انقباض G می‌نامیم هرگاه تابع $f: V(G) \rightarrow V(H)$ موجود باشد به طوری که:

(۱) برای هر $u \sim v$ ، $f(u)$ و $f(v)$ برابر یا مجاور باشند.

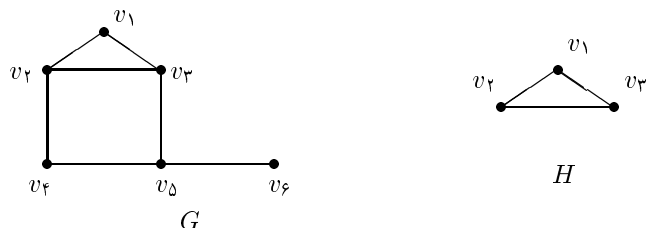
(۲) برای هر $u \in V(H)$ داشته باشیم $f(u) = u$.

در این صورت f را یک تابع انقباضی^{۱۸} می‌نامیم.

\triangle
18) retraction

مثال. در شکل ۴ یک گراف G و انقباض H از آن نشان داده شده‌اند. تابع f که روی $\{v_1, v_2, v_3\}$ ثابت است و $f(v_4) = v_2$ و $f(v_5) = f(v_6) = v_3$ یک تابع انقباضی است.

♡



شکل ۴: مثالی از انقباض

قبل از بیان کاربرد انقباض در بازی دزد و پلیس، دو لم بیان می‌کنیم.

لم ۷-۴ فرض کنید P یک کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس از G باشد. در این صورت P انقباضی از G است.

اثبات. فرض کنید $P = u_0 u_1 \dots u_m$. برای هر $v \in V(G)$ تعریف کنید $g(v) = \min\{m, d(v, u_0)\}$ و $f(v) = u_{g(v)}$. خاصیت اول انقباض از نامساوی مثلث به راحتی نتیجه می‌شود و خاصیت دوم هم به دلیل این که P یک کوتاه‌ترین مسیر است برقرار است. □

لم ۸-۴ فرض کنید C یک کوتاه‌ترین دور در G باشد. در این صورت C انقباضی از G است.

اثبات. فرض کنید $C = u_0 u_1 \dots u_m u_0$ و $e = u_m u_0$. مسیر $P = u_0 u_1 \dots u_m$ یک کوتاه‌ترین مسیر در $G - e$ است پس طبق لم بالا یک تابع انقباضی $f: V(G - e) \rightarrow V(P)$ موجود است. با کمی دقت می‌توان دید این تابع به عنوان یک تابع از $V(G)$ به $V(C)$ نیز یک تابع انقباضی است پس C انقباضی از G است. □

برای مطالعات بیشتر درباره انقباض‌ها به فصل دوم [HN04] مراجعه کنید. حال به بررسی ارتباط انقباض‌ها با محافظت از زیرگراف‌ها می‌پردازیم.

لم ۹-۴ فرض کنید P یک کوتاه‌ترین مسیر در G باشد. در این صورت یک مأمور می‌تواند پس از طی چند دور، طوری حرکت کند که در صورت ورود دزد به P فوراً او را دستگیر کند.

اثبات. تابع انقباضی $f: V(G) \rightarrow V(P)$ را در نظر می‌گیریم. مکان دزد را در G را با R و تصویر مکان دزد تحت f را با $f(R)$ نشان می‌دهیم. مأمور مورد نظر به P می‌رود و با توجه به این که هر مسیر ۱-جستجوپذیر است، پس از چند دور می‌تواند $f(R)$ را دستگیر کند. از این به بعد مأمور همواره طوری حرکت می‌کند که با $f(R)$ در یک رأس باقی بماند. علت این که او می‌تواند چنین بازی کند این است که f یک تابع انقباضی است، بنابراین اگر مثلاً دزد از رأس u به رأس v حرکت کرد، چون $f(u)$ و $f(v)$ برابر یا مجاور هستند، مأمور که در دور قبل در $f(u)$ بوده می‌تواند در دور بعد در $f(v)$ باشد. حال اگر دزد به رأسی مثل w از P وارد بشود، چون $f(w) = w$ پس طبق استراتژی حرکتی مأمور، وی نیز بلافاصله وارد w شده و دزد را دستگیر می‌کند. □

نکته. اگر یک یا چند مأمور طوری بازی کنند که در صورت ورود دزد به یک زیرگراف H فوراً او را دستگیر کنند، گفته می‌شود که این مأمورین از زیرگراف H محافظت می‌کنند.

لم ۹-۴ نخستین بار در [AF84] مطرح شده و در اثبات قضیه ۷-۱ به کار برده شده است. ایده‌ای که این لم به ما می‌دهد، این است که با انتخاب مسیرهایی که گراف را به چند قسمت تقسیم می‌کنند و محافظت از این مسیرها، دزد را در یکی از این قسمت‌ها محدود کنیم و سپس مجدداً این کار را تکرار کنیم تا به تدریج فضای در اختیار دزد محدودتر بشود و به گوشه‌ای رانده شود و او را در آنجا دستگیر کنیم.

این لم مهم‌ترین ایده موجود برای به دست آوردن کران بالا برای عدد جستجو است که در ادامه به چند تا از آن‌ها اشاره می‌کنیم. ابتدا با مفهوم مهم پهنای درختی آشنا می‌شویم که به نوعی با میزان همبندی و قابلیت چند تکه شدن گراف ارتباط دارد و در بسیاری از مباحث نظریه گراف ظاهر می‌شود:

تعریف (تجزیه درختی، tree-decomposition و پهنای درختی ($tw(G)$ ، tree-width)). یک تجزیه درختی G یک زوج $(T, \{W_x : x \in V(T)\})$ است که T یک درخت است و $\{W_x\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $V(G)$ است به طوری که سه خاصیت زیر برقرارند:

(۱) هر رأس G عضو لااقل یکی از W_x هاست.

(۲) برای هر دو رأس مجاور u, v از G ، لااقل یک x هست که $u, v \in W_x$.

(۳) برای هر رأس u از G ، مجموعه رئوس $\{x \in V(T) : u \in W_x\}$ یک زیرگراف همبند از T می‌سازند.

پهنای یک تجزیه درختی را برابر $\max\{|W_x| - 1 : x \in V(T)\}$ تعریف می‌کنیم. پهنای درختی G را برابر با مینیمم پهنای تمام تجزیه‌های درختی ممکن G تعریف کرده و با $tw(G)$ نشان می‌دهیم.

پهنای درختی هر درخت برابر ۱ است. برای آشنایی بیشتر با تجزیه و پهنای درختی فصل دوازدهم [Die05] را ببینید.

قضیه ۱۰۰۴ ([JKT]) برای هر گراف G داریم $cn(G) \leq 1 + \lfloor tw(G)/2 \rfloor$.

نکته. برای هر $w \leq 5$ گراف G با $tw(G) = w$ و $cn(G) = 1 + \lfloor w/2 \rfloor$ موجود است.

نتیجه ۱۱-۴ ([JKT]) فرض کنید G درخت نیست. در این صورت اگر p طول بزرگ‌ترین دور G باشد آن‌گاه داریم $cn(G) \leq \lfloor p/2 \rfloor$.

اثبات. برای هر G داریم $tw(G) \leq p - 1$ (تمرین ۱۸ از فصل دوازدهم [Die05] را ببینید). ایده دیگری که برای یافتن کران بالا برای عدد جستجو وجود دارد، این است که رئوس گراف را به صورت اجتماع رئوس تعدادی زیرگراف بنویسیم که از هر کدام از زیرگراف‌ها بتوان با تعدادی مأمور محافظت کرد و بدین ترتیب خودبه‌خود از کل گراف نیز محافظت می‌شود. قضیه زیر که بهترین کران عمومی موجود برای گراف‌ها برحسب تعداد رئوس است از این ایده استفاده می‌کند.

قضیه ۱۲-۴ ([Chi08]) برای هر G داریم $cn(G) \in O(n/\log n)$.

نکته. درباره تنگ بودن^{۱۹} این کران اطلاع دقیقی در دست نیست، قضیه ۵-۸ را ببینید.

19) tightness

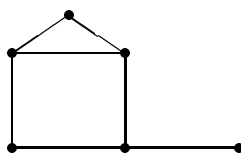
اگر زیرگراف‌هایی که برای پوشاندن گراف استفاده می‌شوند انقباض باشند، نتیجه قضیه زیر کران بالایی برای عدد جستجوی گراف اصلی می‌دهد:

$$\text{قضیه ۱۳-۴ (BI93)} \quad \text{اگر } H \text{ یک انقباض } G \text{ باشد آن گاه } cn(G) \leq \max\{cn(H), 1 + cn(G - H)\}.$$

نکته. ممکن است $G - H$ گرافی ناهمبند باشد. در این صورت $cn(G - H)$ را برابر با ماکسیمم عدد جستجوی مؤلفه‌های همبندی آن تعریف می‌کنیم.

اثبات. فرض کنید $f: G \rightarrow H$ یک انقباض باشد و $c \geq \max\{cn(H), 1 + cn(G - H)\}$ و R مکان دزد باشد. ابتدا $cn(H)$ تا از مأمورین $f(R)$ را دستگیر می‌کنند. مأموری که با $f(R)$ در یک رأس قرار گرفته از آن پس طوری حرکت می‌کند که همواره با $f(R)$ در یک رأس بماند و در نتیجه دزد هرگز نمی‌تواند وارد H بشود و $c - 1$ مأمور دیگر به آن مؤلفه همبندی از $G - H$ که دزد در آن قرار دارد می‌روند و دزد را دستگیر می‌کنند. این کار به دلیل $c - 1 \geq cn(G - H)$ امکان‌پذیر است. \square

مثال. فرض کنید G گراف شکل ۵ باشد و H مثلث موجود در آن باشد. داریم $G - H \simeq P_2$ که نتیجه می‌دهد $cn(G) \leq \max\{cn(H), 1 + cn(G - H)\} = \max\{1, 1 + 1\} = 2$



شکل ۵: مثال مربوط به قضیه ۱۳-۴

نتیجه ۱۴-۴ فرض کنید H_1, H_2, \dots, H_k زیرگراف‌هایی از G باشند به طوری که:

$$(1) \quad \text{برای هر } 1 \leq i \leq k, H_i \text{ انقباضی از } G - H_1 - \dots - H_{i-1} \text{ باشد.}$$

$$(2) \quad \bigcup_{i=1}^k V(H_i) = V(G)$$

در این صورت داریم $cn(G) \leq \max\{i - 1 + cn(H_i) : 1 \leq i \leq k\}$

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم برای هر j ، رأسی در H_j هست که در بقیه H_i ها نیست، زیرا در غیر این صورت آن H_j را از بین H_i ها حذف می‌کنیم و حکم را برای بقیه ثابت می‌کنیم. حکم را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$ ، حکم به یک نامساوی بدیهی تبدیل می‌شود. برای $k > 1$ ، طبق قضیه قبل داریم $cn(G) \leq \max\{cn(H_1), 1 + cn(G - H_1)\}$ و از فرض استقرا داریم $cn(G - H_1) \leq \max\{i - 2 + cn(H_i) : 2 \leq i \leq k\}$ پس حکم با جای‌گذاری مقدار $cn(G - H_1)$ ثابت می‌شود. \square

نتیجه ۱۵-۴ برای هر G داریم $cn(G) \leq \lfloor n/g(G) \rfloor + 1$

اثبات. فرض کنید C_1 یک کوتاه‌ترین دور در G باشد، C_2 یک کوتاه‌ترین دور در $G - C_1$ باشد و به همین ترتیب دنباله‌ای از دورها مانند C_1, C_2, \dots, C_k ساخته می‌شود به طوری که $G - C_1 - C_2 - \dots - C_k$ یا یک گراف تهی است و یا یک جنگل 20

²⁰ forest

مانند H است. در حالت اول C_1, C_2, \dots, C_k در شرایط نتیجه بالا صدق می‌کنند و با توجه به این که $cn(C_i) = 2$ ، داریم $cn(H) \leq k + 1$. در حالت دوم C_1, C_2, \dots, C_k, H شرایط نتیجه بالا را برآورده می‌کنند و با توجه به این که $cn(H) = 1$ مجدداً $cn(G) \leq k + 1$.

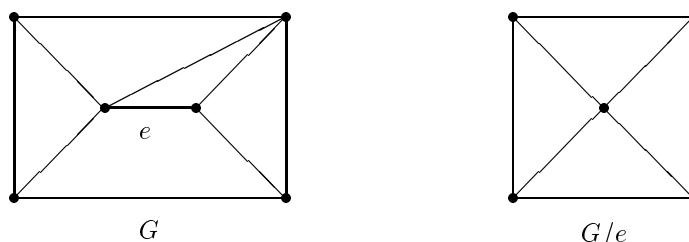
حال دقت کنید که طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف با حذف رئوس کم نمی‌شود. در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم $|V(C_i)| \geq g$ پس $kg \leq n$ و $cn(G) \leq k + 1 \leq \lfloor n/g(G) \rfloor + 1$ □

با دیدن نتیجه ۱۴-۴ این ایده به ذهن خطور می‌کند که در G یک انقباض با اندازه بزرگ و عدد جستجوی کران‌دار پیدا کنیم و آن انقباض را حذف کنیم و روی گراف باقی مانده همین کار را تکرار کنیم و در نهایت کران بالایی برای عدد جستجوی G به دست آوریم. قضیه زیر نشان می‌دهد این ایده برای گراف‌های دلخواه لزوماً به کران مناسبی منجر نمی‌شود.

قضیه ۱۶-۴ (BKL) برای هر n به قدر کافی بزرگ گراف G هست که اندازه بزرگ‌ترین انقباض آن $O(\log^4 n)$ می‌باشد.

حال به مبحث کهداها و ارتباط آن‌ها با عدد جستجوی گراف می‌پردازیم. ابتدا لازم است این مفهوم مهم را تعریف کنیم: **تعریف (انقباض یالی، edge contraction و کهدا، minor)**. فرض کنید $e = uv$ یالی از G باشد. منظور از انقباض یالی e ، حذف این یال و چسباندن دو رأس u و v به هم می‌باشد. همسایه‌های رأس جدید رئوسی هستند که به u یا v یا هر دو وصل بوده‌اند. گراف حاصل را با G/e نشان می‌دهیم. فرض کنید زیرگرافی از G را برمی‌داریم و تعدادی از یال‌های آن را منقبض می‌کنیم و به گراف H می‌رسیم. در این صورت H را یک کهدا G می‌نامیم و می‌نویسیم $H \preceq G$. □

مثال. در شکل ۶ می‌توانید مثالی از انقباض یالی را ببینید. در شکل ۷ مثالی از کهدا نشان داده شده است. گراف G (که برخی یال‌های آن به صورت خط‌چین هستند) زیرگرافی از Y است. گراف X از انقباض یال‌هایی از G که با خط‌چین نشان داده شده‌اند به دست آمده است، پس $X \preceq Y$.



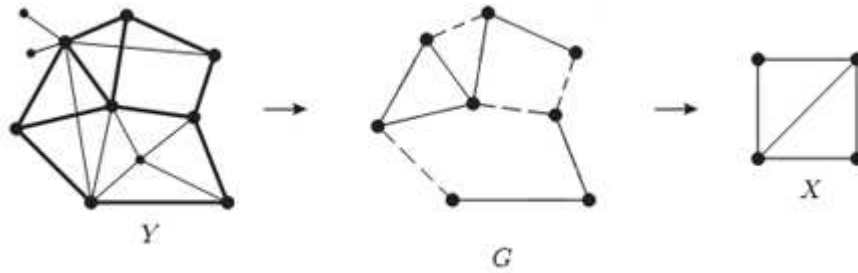
شکل ۶: مثالی از انقباض یالی

برای اطلاعات بیشتر درباره این مفهوم فصل دوازدهم [Die05] را ببینید. در ادامه چند قضیه از این دست خواهیم دید که گراف‌های H ای معرفی می‌کنند و بیان می‌کنند که اگر $H \not\preceq G$ آن‌گاه $cn(G) \leq \alpha(H)$.

قضیه ۱۷-۴ (And86) فرض کنید u رأسی از گراف H است به طوری که $H - u$ رأس تنها^{۲۱} ندارد. اگر $H \not\preceq G$ آن‌گاه $cn(G) \leq |E(H - u)|$

نتیجه ۱۸-۴ (And86) اگر $K_m \not\preceq G$ آن‌گاه $cn(G) \leq \binom{m-1}{2}$

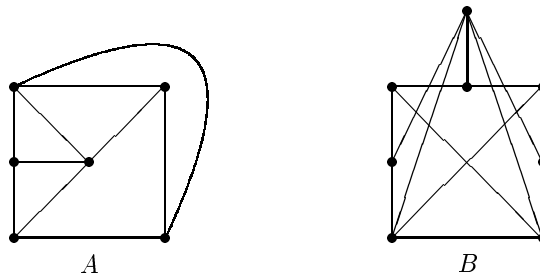
21) isolated vertex



شکل ۷: مثالی از کهاد (از [Die05] گرفته شده)

نتیجه ۱۹-۴ [And86] فرض کنید H گرافی همبند با لافل دو یال باشد. در این صورت از $G \not\approx H$ نتیجه می‌شود $cn(G) < |E(H)|$.

قضیه ۲۰-۴ [And86] گراف‌های A, B را در شکل ۸ ببینید. اگر $G \not\approx A$ آن‌گاه $cn(G) \leq ۲$ و اگر $G \not\approx B$ آن‌گاه $cn(G) \leq ۳$.



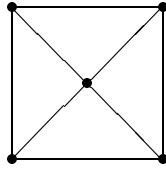
شکل ۸: گراف‌های مربوط به قضیه ۲۰-۴

تعریف (چرخ (W_n) ، wheel). گراف چرخ n رأسی ($n \geq 4$) که با W_n نمایش داده می‌شود از وصل کردن یک رأس جدید به همه رئوس C_{n-1} به دست می‌آید.
 مثال. چرخ ۵ رأسی در شکل ۹ نشان داده شده است.

قضیه ۲۱-۴ [And86] برای هر $n \geq 4$ اگر $G \not\approx W_n$ آن‌گاه $cn(G) \leq \lfloor (n+4)/3 \rfloor$.

از نتیجه ۱۸-۴ می‌دانیم اگر $G \not\approx K_m$ آن‌گاه $cn(G) \in O(m^2)$. قضیه زیر نشان می‌دهد بهبود این نتیجه باعث یافتن کران بالایی عمومی برای گراف‌های n رأسی می‌شود.

قضیه ۲۲-۴ [BKL] اگر بتوان ثابت کرد که برای هر G ، $G \not\approx K_m$ نتیجه می‌دهد $cn(G) \in O(m^{2-\epsilon})$ آن‌گاه برای هر G داریم $cn(G) \in O(n^{1-\delta})$ که در آن $\delta = \epsilon/(4-\epsilon)$.



شکل ۹: چرخ ۵ رأسی

اثبات. در هر رأسی که درجه‌اش $\Omega(n^\delta)$ است یک مأمور می‌گذاریم که از این رأس و همسایه‌هایش محافظت کند. تعداد چنین رئوسی $O(n^{1-\delta})$ است. در زیرگرافی که محافظت نشده باقی می‌ماند درجه هر رأس حداکثر $O(n^\delta)$ است پس حداکثر $O(n^{1+\delta})$ یال دارد. در نتیجه اندازه بزرگ‌ترین گراف کاملی که کهاد آن است حداکثر $O(n^{(1+\delta)/2})$ است. در نتیجه طبق فرضی که کردیم $O(n^{((1+\delta)/2)(2-\epsilon)}) = O(n^{1-\delta})$ مأمور برای جستجوی G کافی است. □

حکم قضیه بالا تلاش برای یافتن ϵ ی که در مفروضات آن صدق کند را برمی‌انگیزد. نتیجه زیر گامی در این جهت است هرچند به خودی خود یک کران بالای عمومی برای گراف‌ها ارائه نمی‌دهد.

قضیه ۲۳-۴ ([NT]) برای n به قدر کافی بزرگ اگر G گرافی m -همبند باشد و $G \not\cong K_m$ آن گاه $m - 5$ رأس از G هستند که با حذف آن‌ها به یک گراف مسطح می‌رسیم.

نتیجه ۲۴-۴ برای n به قدر کافی بزرگ اگر G گرافی m -همبند باشد و $G \not\cong K_m$ آن گاه $m - 2$ رأس از G هستند که $cn(G) \leq m - 2$.

اثبات. کافی است در هر یک از $m - 5$ رأسی که توسط قضیه قبل معرفی می‌شوند یک مأمور بگذاریم. در گراف مسطح حاصل نیز با ۳ مأمور می‌توان دزد را دستگیر کرد. □

۵ کران‌های پایین برای عدد جستجو

ایده اصلی برخی از کران‌های پایین موجود برای عدد جستجو لم نه چندان عمیق زیر است.

لم ۱-۵ فرض کنید c $cn(G) \leq c$ در این صورت رئوس u, v_1, v_2, \dots, v_c از G وجود دارند که $N[u] \subset \cup_{i=1}^c N[v_i]$.

اثبات. فرض کنید دزد از رأس دلخواهی شروع کند و هر بار که مأموری به مجاورت او رسید به رأسی که مأموری مجاورش نیست فرار کند. فرض کنیم در لحظه‌ای که او دیگر نمی‌تواند فرار کند (زیرا c مأمور بالاخره باید او را دستگیر کنند) در رأسی مانند u باشد و مأمورین در رئوس v_1, v_2, \dots, v_c باشند. چون دزد نمی‌تواند فرار کند پس رأس u و همسایه‌هایش تحت کنترل پلیس است در نتیجه داریم $N[u] \subset \cup_{i=1}^c N[v_i]$. □

در ادامه سه تا از نتایجی که ایده اصلی‌شان این لم است را می‌بینیم.

قضیه ۲-۵ ([NN98]) اگر برای هر دو رأس u, v داشته باشیم $|N[u] \cap N[v]| \leq 2$ آن گاه $\delta(G) + 1 \leq cn(G)$.

اثبات. اگر دزد در u گیر بیفتد و مأمورین در v_1, v_2, \dots, v_c باشند آن گاه

$$N[u] \subset \bigcup_{i=1}^c N[v_i] \Rightarrow \delta(G) + 1 \leq |N[u]| \leq \left| \bigcup_{i=1}^c N[u] \cap N[v_i] \right| \leq \sum_{i=1}^c |N[u] \cap N[v_i]| \leq 2c$$

□

قضیه ۳-۵ ([Fr87a]) اگر هر دو رأس گراف G توسط حداکثر دو مسیر به طول ۱ یا ۲ به هم وصل شده باشند، آن گاه $cn(G) \geq \lceil \delta(G)/2 \rceil$ هم چنین اگر G مثلث نداشته باشد آن گاه $cn(G) \geq \lceil (\delta(G) + 1)/2 \rceil$.

قضیه ۴-۵ اگر هر دو رأس از گراف بدون مثلث G حداکثر k همسایه مشترک داشته باشند، آن گاه داریم

$$cn(G) \geq \left\lceil \frac{\delta(G) + k - 1}{k} \right\rceil$$

اثبات. اگر دزد در u گیر بیفتد آن گاه در لحظه قبل از دستگیری قطعی، یکی از مأمورین باید خود u را کنترل کند. پس این مأمور خود در یکی از همسایه‌های u قرار دارد و هیچ همسایه دیگری را نمی‌تواند کنترل کند چرا که G مثلث ندارد. پس بقیه $cn(G) - 1$ مأمور باید همسایه‌های باقی مانده را کنترل کنند. هر مأمور حداکثر k همسایه را کنترل می‌کند و تعداد همسایه‌ها لااقل $\delta(G) - 1$ تا است پس $cn(G) \geq 1 + \lceil \frac{\delta(G) - 1}{k} \rceil = \left\lceil \frac{\delta(G) + k - 1}{k} \right\rceil$

مثال. اگر P گراف پترسن باشد (شکل ۲) آن گاه هر دو رأس P حداکثر یک همسایه مشترک دارند و P مثلث ندارد در نتیجه داریم $cn(P) \geq 3$. از طرفی با توجه به قضیه ۴-۱ داریم $cn(P) \leq 3$ پس نتیجه می‌گیریم $cn(P) = 3$.
قضیه زیر کران پایینی را با توجه به اندازه کوچک‌ترین دور G ارائه می‌دهد که جالب است.

قضیه ۵-۵ ([Fr87b]) اگر $g(G) \geq 3t - 3$ آن گاه $cn(G) > (\delta(G) - 1)^t$.

قضیه زیر نیز ارتباط جالبی بین انقباض‌ها و کران‌های پایین برای عدد جستجو بیان می‌کند و نشان می‌دهد انقباض در این بازی مفهومی اساسی است.

قضیه ۶-۵ ([BI93]) اگر H یک انقباض G باشد آن گاه $cn(H) \leq cn(G)$.

اثبات. تابع انقباضی $f: V(G) \rightarrow V(H)$ مفروض است. فرض کنید $c < cn(H)$ و می‌خواهیم نشان دهیم $c < cn(G)$. کافی است برای دزدی روی G یک استراتژی فرار نشان دهیم. در هر لحظه وقتی مأمورین در رؤس $v_1, v_2, \dots, v_c \in V(G)$ هستند، وی تصور می‌کند که مأمورین در حقیقت روی $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_c) \in V(H)$ هستند. دزد با این تصور استراتژی فرار خودش روی H را بازی می‌کند. توجه کنید که اگر مأمورین روی G حرکتی انجام دهند، تصویر آن‌ها تحت f یک حرکت معتبر روی H انجام می‌دهد (به دلیل خاصیت اول انقباض). در نتیجه دزد می‌تواند استراتژی فرار خودش روی H را به راحتی بازی کند. به دلیل $c < cn(H)$ ، دزد می‌تواند طوری بازی کند که هرگز در رأسی مانند $f(v_i)$ قرار نگیرد. در نتیجه چون او هرگز از H خارج نمی‌شود و f روی H تابع ثابت است، نتیجه می‌گیریم دزد هرگز دستگیر نمی‌شود. پس $c < cn(G)$. چون این موضوع برای هر $c < cn(H)$ درست است، داریم $cn(H) \leq cn(G)$.

یک پرسش که از ابتدا درباره بازی دزد و پلیس مطرح بوده این است: عدد جستجوی یک گراف n رأسی حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟ از قضیه ۴-۱۲ می‌دانیم عدد جستجو در $O(n/\log n)$ است ولی به نظر می‌رسد خیلی کم‌تر از این باشد. در انتهای این

قسمت خانواده‌ای از گراف‌های n رأسی که عدد جستجویشان از نظر مجانبی بیشترین مقداری است که تا به حال به دست آمده را معرفی می‌کنیم. ابتدا باید با یک تعریف آشنا شویم.

تعریف (صفحه تصویری متناهی، finite projective plane). یک صفحه تصویری متناهی مجموعه‌ای متناهی از نقاط^{۲۲} و خطوط^{۲۳} است به طوری که سه شرط زیر برقرارند:

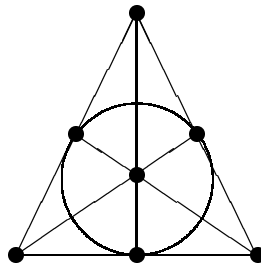
(۱) برای هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط هست که شامل هر دوی آنهاست.

(۲) هر دو خط متمایز در دقیقاً یک نقطه اشتراک دارند.

(۳) چهار نقطه وجود دارند که هیچ خطی شامل سه تا از آنها نیست.

△

مثال. کوچک‌ترین صفحه تصویری به صفحه فانو^{۲۴} مشهور است و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. این صفحه از ۷ نقطه و ۷ خط تشکیل شده است. یکی از خطها به شکل دایره و بقیه به شکل پاره‌خط نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰: صفحه فانو

می‌توان دید که تعداد نقاط و خطوط یک صفحه تصویری با هم برابر است و برابر با عددی مانند $q^2 + q + 1$ است که q مرتبه^{۲۵} آن صفحه نامیده می‌شود. یک صفحه تصویری از مرتبه^{۲۶} q ، روی هر خطش $q + 1$ نقطه دارد و از هر نقطه‌اش $q + 1$ خط می‌گذرد. هم‌چنین می‌دانیم برای هر عدد اول p و عدد طبیعی a صفحه تصویری از مرتبه^{۲۷} p^a وجود دارد ([Cam03] را ببینید).

تعریف (گراف وقوع صفحه تصویری متناهی (I_q) ، incidence graph of a finite projective plane). گراف وقوع صفحه تصویری متناهی یک گراف دوبخشی است که در یک بخش آن متناظر با هر خط یک رأس وجود دارد و در بخش دیگر متناظر با هر نقطه یک رأس وجود دارد. اگر نقطه‌ای روی خطی واقع باشد رئوس متناظرشان را به هم وصل می‌کنیم. این گراف را با I_q نمایش می‌دهیم

△

◇

نکته. گراف I_q ، $2q^2 + 2q + 2$ رأس دارد و درجه همه رئوس آن $q + 1$ است.

قضیه ۷-۵ ([Pra]) عدد جستجوی I_q برابر $q + 1$ است.

22) points 23) lines 24) the Fano plane 25) order

اثبات. این گراف دوبخشی است پس مثلث ندارد و هر دو رأس آن حداکثر ۱ همسایه مشترک دارند زیرا از هر دو نقطه دقیقاً یک خط می‌گذرد و از دو خط دقیقاً یک نقطه اشتراک دارند. پس طبق قضیه ۴-۵ داریم $cn(I_q) \geq \delta(I_q) = q + 1$.

حال یک استراتژی با $q + 1$ مأمور برای I_q ارائه می‌کنیم که نشان می‌دهد $cn(I_q) \leq q + 1$. مأمورین را در $q + 1$ نقطه متمایز مانند c_1, c_2, \dots, c_{q+1} قرار می‌دهیم. اگر دزد اول کار روی یک خط l قرار بگیرد، فرض کنیم b_1, b_2, \dots, b_{q+1} نقاط روی خط l باشند و l_i خطی باشد که از c_i, b_i می‌گذرد. مأمور i ام از c_i به l_i حرکت می‌کند. در نتیجه دزد محاصره می‌شود و نمی‌تواند به هیچ یک نقاط b_i برود و یکی از مأمورین در دو حرکت او را دستگیر می‌کند.

حالت دوم این است که دزد اول کار روی نقطه‌ای مثل v قرار بگیرد. فرض کنید l خط شامل c_1, v باشد. مأمور اول به l می‌رود. در نتیجه دزد برای این که دستگیر نشود مجبور است به خطی مانند l' فرار کند. اگر نقاط روی l' را $v, b_2, b_3, \dots, b_{q+1}$ بنامیم، و l_i را خطی فرض کنیم که از c_i, b_i می‌گذرد، مأمور i ام به l_i می‌رود. دقت کنید که مأمور اول از قبل روی $l_i = l$ هست. در نتیجه دوباره دزد محاصره می‌شود و یکی از مأمورین در دو حرکت او را دستگیر می‌کند.

و اینک بهترین کران پایین مجانبی عمومی موجود برای گراف‌های n رأسی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸-۵ (Pra) برای هر n به قدر کافی بزرگ گراف G موجود است که $cn(G) \in \Omega(\sqrt{n})$.

اثبات. فرض کنید q بزرگ‌ترین عدد اولی باشد که $2(q^2 + q + 1) \leq n$. به یکی از رؤوس گراف I_q یک مسیر به طول $1 + 2(q^2 + q + 1) - 1$ می‌چسبانیم تا گراف G حاصل شود. به راحتی می‌توان دید که I_q انقباضی از G است. از طرف دیگر طبق قضیه چبیشف [SW09] را ببینید) عدد اولی بین q و $2q$ وجود دارد، در نتیجه با توجه به نحوه انتخاب q داریم $n < 2((2q)^2 + 2q + 1)$ که نتیجه می‌دهد

$$\sqrt{n/\lambda} < q + 1 = cn(I_q) \leq cn(G)$$

□

بهترین کران بالای موجود برای عدد جستجوی گراف‌های n رأسی برابر $O(n/\log n)$ است (قضیه ۴-۱۲ را ببینید) و تعیین دقیق‌ترین مرتبه بزرگی 2^6 برای عدد جستجوی یک گراف n رأسی یکی از مهم‌ترین مسائل بازی دزد و پلیس است که سال‌هاست کسی موفق به حل آن نشده است.

عدد جستجوی گراف‌های خاص

۶ گراف‌های ۱-جستجوپذیر

نخستین مقالاتی که درباره بازی دزد و پلیس منتشر شدند [Qui78] و [NW83] بودند که در آن‌ها (به صورت مستقل از هم) بازی با یک مأمور مطرح شد و گراف‌هایی که پلیس در آن‌ها می‌تواند برنده شود تعیین شدند. لذا مسئله تعیین گراف‌های ۱-جستجوپذیر را می‌توان قدیمی‌ترین مسئله بازی دزد و پلیس نامید. در این قسمت حل این مسئله بیان خواهد شد.

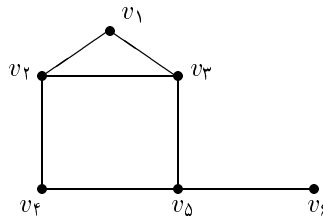
تعریف (رأس محاطی، dominated vertex، corner irreducible vertex و رأس محیطی، dominating vertex)

. رأس u را در گراف G محاطی (یا محاط شده) می‌نامیم هرگاه رأس دیگری مانند v از G وجود داشته باشد که $N[u] \subset N[v]$.

در این صورت رأس v را رأس محیطی (یا محاط کننده) u می‌نامیم. \triangle

مثال. در گراف شکل ۱۱، رأس v_6 توسط v_5 محاط شده است. همچنین v_1 توسط v_2 محاط شده است. ولی v_4 توسط v_3

محاط نشده است. \heartsuit



شکل ۱۱: مثال مربوط به لم ۱-۶

از لم ۱-۵ می‌دانیم که اگر $cn(G) = 1$ آن‌گاه G دارای لااقل یک رأس محاطی است.

لم ۱-۶ اگر u یک رأس محاطی G باشد، $cn(G) = 1$ اگر و تنها اگر $cn(G - u) = 1$.

اثبات. فرض کنید v رأس محیطی u باشد. می‌توان دید که تابع $f: V(G) \rightarrow V(G - u)$ که همه رئوس به غیر از u را به خودشان می‌برد و u را به v می‌برد یک انقباض است. از قضیه ۶-۵ داریم $cn(G - u) \leq cn(G)$ پس اگر $cn(G) = 1$ نیز $cn(G - u) = 1$ است. \heartsuit

حال اگر $cn(G - u) = 1$ آن‌گاه ثابت می‌کنیم یک مأمور می‌تواند در G نیز دزد را دستگیر کند. فرض کنید R نشان دهنده مکان دزد باشد. یک مأمور می‌تواند $f(R)$ را در $G - u$ دستگیر کند. وقتی این کار را انجام داد یا خود R را نیز دستگیر کرده است که کار تمام است و گرنه دزد در u می‌باشد و مأمور در $f(u) = v$ قرار دارد. در نتیجه چون $N[u] \subset N[v]$ هر حرکتی دزد انجام بدهد در دور بعد دستگیر می‌شود. \square

مثال. فرض کنید G گراف شکل ۱۱ باشد. رأس v_1 یک رأس محاطی است پس $cn(G) = 1$ اگر و تنها اگر $cn(G - v_1) = 1$.

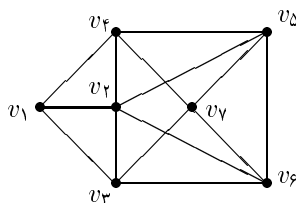
به علاوه v_6 در $G - v_1$ محاط شده است پس $cn(G - v_1) = 1$ اگر و تنها اگر $cn(G - \{v_1, v_6\}) = 1$ ولی دقت کنید

که $G - \{v_1, v_6\} \simeq C_4$ پس این گراف ۱-جستجوپذیر نیست. پس G نیز ۱-جستجوپذیر نیست. از طرفی از قضیه ۴-۱۳ داریم $cn(G) \leq 2$. نتیجه می‌گیریم $cn(G) = 2$.

نتیجه‌ای که از لم بالا گرفته می‌شود این است که $cn(G) = 1$ اگر و تنها اگر G دارای رأسی محاطی مانند u باشد به طوری که $cn(G - u) = 1$. برای این که این نتیجه را به صورت منظم‌تری بیان کنیم از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف (گراف ترتیب‌پذیر، dismantlable graph). گراف G را ترتیب‌پذیر می‌گوییم هرگاه بتوان رؤس آن را به صورت (v_1, v_2, \dots, v_n) مرتب کرد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n-1$ ، رأس v_i در زیرگراف القا شده توسط $\{v_i, \dots, v_n\}$ محاط شده باشد. \triangle

مثال. اگر رؤس گراف شکل ۱۲ را به صورتی که در شکل می‌بینید شماره‌گذاری کنیم ثابت می‌شود این یک گراف ترتیب‌پذیر است. \heartsuit



شکل ۱۲: یک گراف ترتیب‌پذیر

قضیه ۲-۶ ([NW83]) گراف G ۱-جستجوپذیر است اگر و تنها اگر ترتیب‌پذیر باشد.

اثبات. (\Leftarrow) حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 1, 2$ درستی آن واضح است. فرض کنید $cn(G) = 1$. در این صورت G دارای رأسی محاطی مانند v_1 است. طبق لم قبل $G - v_1$ نیز ۱-جستجوپذیر است. طبق فرض استقرا رؤس $G - v_1$ را می‌توان به صورت (v_2, v_3, \dots, v_n) مرتب کرد به طوری که برای هر $2 \leq i \leq n-1$ ، رأس v_i در زیرگراف القا شده توسط $\{v_i, \dots, v_n\}$ محاط شده باشد. با اضافه کردن v_1 به ابتدای این ترتیب می‌توان ترتیب مطلوب را برای G به دست آورد و بنابراین G ترتیب‌پذیر است.

(\Rightarrow) مجدداً حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 1, 2$ درستی آن واضح است. (v_2, v_3, \dots, v_n) یک ترتیب برای $G - v_1$ است که نشان می‌دهد $G - v_1$ ترتیب‌پذیر است لذا طبق فرض استقرا ۱-جستجوپذیر است. حالا چون v_1 یک رأس محاطی در G است پس طبق لم بالا G نیز ۱-جستجوپذیر است. \square

بدین ترتیب ساختار گراف‌های ۱-جستجوپذیر تعیین شد. در فصل اول [Cla02] می‌توانید استراتژی پلیس برای دستگیری دزد در یک گراف ۱-جستجوپذیر را ببینید.

در قسمت ۱ دیدیم که گراف‌های کامل و درخت‌ها ۱-جستجوپذیر هستند. در ادامه این قسمت خانواده بزرگ‌تری از گراف‌های ۱-جستجوپذیر را معرفی می‌کنیم.

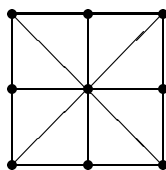
تعریف (پُل، bridge و گراف پل‌دار، bridged graph). اگر C یک دور باشد، منظور از یک پُل روی C مسیری بین دو رأس u, v از آن است که طول آن اکیداً کم‌تر از $d_C(u, v)$ باشد. گراف G را پل‌دار می‌گوییم هرگاه هر دور به طول بیش از سه

آن، پُل داشته باشد.

△

♡

مثال. در شکل ۱۳ نمونه‌ای از یک گراف پل‌دار را می‌بینید.



شکل ۱۳: یک گراف پل‌دار

قضیه ۳-۶ ([AF88]) گراف‌های پل‌دار ۱-جستجوپذیر هستند.

تعریف (وتری، مثلث‌بندی‌شده، chordal, triangulated). گراف G را وتری یا مثلث‌بندی‌شده می‌گوییم هرگاه هیچ دور

△

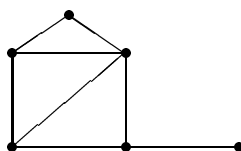
القایی به طول بیش از سه نداشته باشد.

◇

نکته. هر درخت یک گراف وتری است زیرا اصلاً دور ندارد.

♡

مثال. در شکل ۱۴ یک گراف وتری نشان داده شده است.



شکل ۱۴: یک گراف وتری

نتیجه ۴-۶ گراف‌های وتری ۱-جستجوپذیر هستند.

□

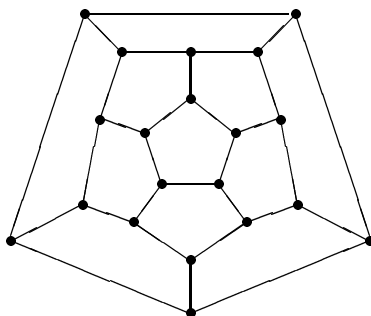
اثبات. به راحتی می‌توان دید که هر گراف وتری پل‌دار است.

۷ گراف‌های مسطح

عدد جستجوی گراف‌های مسطح در [AF84] برای بار نخست مورد بررسی قرار گرفتند. از نظر تاریخی، این گراف‌ها پس از گراف‌های ۱-جستجوپذیر، دسته دومی از گراف‌ها بودند که مورد بررسی قرار گرفتند. یک اهمیت دیگر [AF84] این است که در این مقاله برای نخستین بار مفهوم عدد جستجو مطرح شد.

قضیه ۱۰-۷ ([AF84]) هر گراف مسطح ۳-جستجوپذیر است.

نکته. کران قضیه قبل بهترین کران ثابتی است که می‌توان برای گراف‌های مسطح ارائه کرد، چرا که اگر G گراف مسطح شکل ۱۵ باشد، طبق قضیه ۴-۵ داریم $cn(G) \geq \delta(G) = 3$.



شکل ۱۵: یک گراف مسطح با عدد جستجوی ۳

اگرچه قضیه قبل از قضیه ۴-۲۰ ضعیف‌تر است ولی به طور جداگانه مطرح شد به دلیل این که اثبات ارائه شده در [AF84] برای آن اثباتی مستقیم و ملموس (مبتنی بر ایده تقسیم و حل^{۲۷}) است. در این اثبات برای نخستین بار لم ۴-۹ مطرح و از آن استفاده شده است.

تعریف (گراف برون‌مسطح، outerplanar graph). گراف مسطح G را برون‌مسطح می‌گوییم اگر بتوان آن را طوری روی صفحه رسم کرد که کلیه رئوس، مجاور وجه بیرونی باشند.

مثال. گراف شکل ۱۴ برون‌مسطح است.

قضیه ۲-۷ ([Cla02]) هر گراف برون‌مسطح ۲-جستجوپذیر است.

تعریف (گونای گراف، genus of a graph). هر گراف مسطح را می‌توان روی کره رسم کرد بدون این که یال‌هایش با هم تقاطع داشته باشند. برخی گراف‌های غیر مسطح را می‌توان روی کره‌ای که یک سوراخ دارد و چنبره^{۲۸} نامیده می‌شود رسم کرد بدون این که یال‌هایش تقاطع داشته باشند. منظور از گونای گراف G ، کوچک‌ترین عدد $p \geq 0$ است به طوری که G را بتوان روی کره‌ای که دارای p سوراخ است رسم کرد به طوری که یال‌هایش تقاطع نداشته باشند.

نکته. گونای یک گراف مسطح برابر صفر است.

قضیه ۳-۷ ([Sch01]) اگر p گونای گراف G باشد آن‌گاه $cn(G) \leq \lfloor \frac{2}{3}p \rfloor + 3$.

نکته. درباره این که کران قضیه قبل چقدر دقیق است اطلاعی وجود ندارد. برای $g = 1$ مثالی که تساوی رخ دهد پیدا نشده [Als04]. نویسنده [Sch01] نیز حدس می‌زند که در واقع $cn(G) \leq p + 3$ برقرار است.

27) divide and conquer 28) donut, torus

۸ گراف‌های کیلی

سومین دسته از گراف‌ها که از نظر تاریخی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند گراف‌های کیلی هستند. در ابتدا تعریف آن‌ها را می‌آوریم. تعریف این گراف‌ها بر مفهوم گروه^{۲۹} که یکی از مفاهیم کلیدی در جبر استوار است. برای دیدن تعریف این مفهوم [RW09] را ببینید.

تعریف (گراف کیلی) $(Cay(\Gamma; S))$ ، Cayley graph. فرض کنید Γ یک گروه متناهی و $S \subset \Gamma$ زیرمجموعه‌ای با این خاصیت باشد که هر عضو S وارونش نیز در S است. منظور از گراف کیلی Γ با مجموعه اتصال S که آن را با $Cay(\Gamma; S)$ نمایش می‌دهیم گرافی با مجموعه رئوسی Γ است به طوری که برای هر $g \in \Gamma, s \in S$ داریم $g \sim gs$. \triangle

نکته. این شرط که وارون هر عضو S نیز در S باشد برای این اضافه شده که گراف حاصل بدون جهت باشد، تعریف کلی گراف‌های کیلی چنین شرطی را ندارد. \diamond

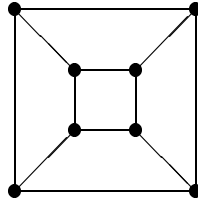
چون گراف‌های کیلی ساختار بسیار منظمی دارند می‌توان برای عدد جستجوی آن‌ها کران‌های مناسبی ارائه کرد:

قضیه ۱-۸ ([Fr87a]) اگر Γ گروهی جابه‌جایی باشد (برای هر $a, b \in \Gamma$ داشته باشیم $ab = ba$) و $Cay(\Gamma; S)$ همبند باشد آن‌گاه داریم

$$cn(Cay(\Gamma; S)) \leq \left\lceil \frac{|S| + 1}{2} \right\rceil$$

تعریف (مکعب d بعدی) (Q_d) ، d-cube ، d-dimensional cube. مکعب d بعدی که با Q_d نمایش داده می‌شود گرافی است که مجموعه رئوس آن همه دنباله‌های به طول d از صفر و یک هستند و دو رأس به هم متصلند اگر دنباله‌های متناظرشان در دقیقاً یک مؤلفه با هم اختلاف داشته باشند. \triangle

مثال. مکعب سه بعدی در شکل ۱۶ نشان داده شده است. \heartsuit



شکل ۱۶: مکعب سه بعدی

نتیجه ۲-۸ ([Als04]) داریم $cn(Q_d) = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$.

اثبات. اگر گروه Γ را مجموعه $\{0, 1\}^d$ با عمل XOR مؤلفه به مؤلفه در نظر بگیریم و قرار دهیم $S = \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ که منظور از e_i برداری است که فقط مؤلفه i ام آن ۱ است، آن‌گاه به راحتی دیده می‌شود که Γ جابه‌جایی است و هم‌چنین $Q_d \simeq Cay(\Gamma; S)$. لذا طبق قضیه بالا $cn(Q_d) \leq \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$.

از طرف دیگر چون Q_d گرافی بدون مثلث است که هر دو رأس آن حداکثر ۲ همسایه مشترک دارند پس طبق قضیه ۴-۵ داریم $cn(Q_d) \geq \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ و حکم ثابت می‌شود. \square

29) group

نکته. تعمیمی از این نتیجه در قضیه ۹-۴ اثبات شده است.

قضیه ۳-۸ ([Fr87b]) اگر برای هر $g \in \Gamma, s \in S$ داشته باشیم $gsg^{-1} \in S$ و $Cay(\Gamma; S)$ همبند باشد آن گاه داریم

$$cn(Cay(\Gamma; S)) \leq |S|$$

نکته. قضیه بالا در مرجع مذکور برای حالت کلی تر گراف کیلی جهت دار بیان شده است.

۹ گراف‌های حاصل ضرب

گراف‌هایی که از انواع حاصل ضرب‌های گراف‌های دیگر به دست می‌آیند دسته چهارمی از گراف‌ها هستند که بررسی می‌شوند. تعریف (حاصل ضرب دکارتی $(G \square H)$ ، cartesian product). اگر G, H دو گراف باشند، حاصل ضرب دکارتی این دو گراف که با $G \square H$ نمایش داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ به طوری که رأس (u_1, v_1) مجاور رأس (u_2, v_2) است اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

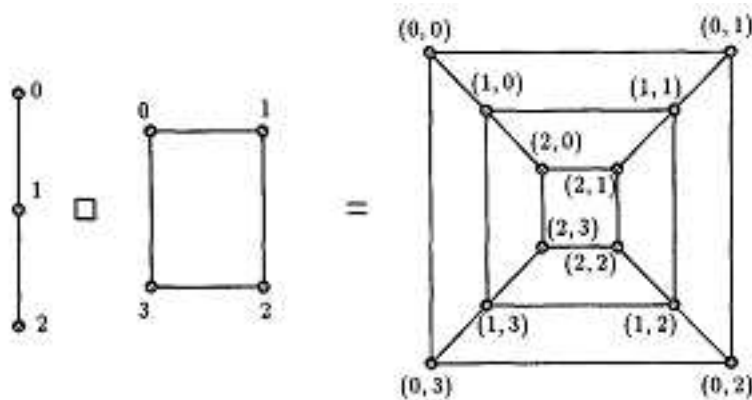
$$(1) \quad u_1 = u_2 \text{ و } v_1, v_2 \text{ در } H \text{ مجاور باشند.}$$

$$(2) \quad v_1 = v_2 \text{ و } u_1, u_2 \text{ در } G \text{ مجاور باشند.}$$

△

♡

مثال. در شکل ۱۷ مثالی از ضرب دکارتی دو گراف نشان داده شده است.



شکل ۱۷: مثالی از ضرب دکارتی (از [NN98] گرفته شده)

قضیه زیر کران‌های بالا و پایینی برای عدد جستجوی حاصل ضرب دکارتی دو گراف برحسب عدد جستجوی آن‌ها بیان می‌کند.

قضیه ۱-۹ ([NN98][Tos88]) برای هر دو گراف G و H داریم $\max\{cn(G), cn(H)\} \leq cn(G \square H) \leq cn(G) + cn(H)$.

اثبات. ابتدا چند تعریف ارائه می‌دهیم. فرض کنید $u \in V(G), v \in V(H)$ دو رأس دلخواه و ثابت باشند. زیرگراف القا شده توسط رئوسی از $V(G \square H)$ که مؤلفه اول آن‌ها u است را با $u \square H$ نشان می‌دهیم. تابع $\pi_H : V(G \square H) \rightarrow V(u \square H)$ که به

صورت $\pi_H(u_1, v_1) = (u, v_1)$ تعریف می‌شود را تابع تصویر روی H می‌خوانیم. تابع π_G مشابهاً تعریف می‌شود. توجه کنید که زیرگراف $u \square H$ با خود H یک‌ریخت است پس داریم $cn(H) = cn(u \square H)$. طرف چپ نامساوی با توجه به این که π_G, π_H در واقع انقباض هستند و قضیه ۶-۵ ثابت می‌شود.

برای طرف راست، یک استراتژی با $cn(G) + cn(H)$ مأمور برای دستگیری دزد در $G \square H$ ارائه می‌دهیم. مکان دزد را با R نشان می‌دهیم. فرض کنید بازیکنی از رأس (u_1, v_1) به رأس (u_2, v_2) برود، اگر $u_1 = u_2$ و $v_1 \sim v_2$ آن‌گاه می‌گوییم بازیکن روی H حرکت کرده است. اگر $v_1 = v_2$ و $u_1 \sim u_2$ می‌گوییم بازیکن روی G حرکت کرده است. می‌گوییم دو بازیکن تصویر یکسانی در G (یا H) دارند هرگاه مؤلفه اول (یا دوم) مکان آن‌ها یکسان باشد. استراتژی از چهار مرحله تشکیل شده است:

(۱) مرحله اول از $cn(G)$ گام تشکیل شده است. در هر یک از گام‌ها $cn(H)$ تا از مأمورین به دلخواه انتخاب می‌شوند و $\pi_H(R)$ را دستگیر می‌کنند. در پایان هر گام مأموری که در رأس $\pi_H(R)$ قرار گرفته، این طوری بازی می‌کند: اگر دزد روی G حرکت کرد او حرکت نمی‌کند، ولی اگر دزد روی H حرکت کرد او نیز به رأس $\pi_H(R)$ حرکت می‌کند. بدین ترتیب تصویر او در H با دزد یکسان باقی می‌ماند. در پایان این مرحله $cn(G)$ تا از مأمورین روی $\pi_H(R)$ قرار دارند. این مأمورین را گروهان اول می‌نامیم.

(۲) در مرحله دوم مأمورین باقی مانده که $cn(H)$ تا هستند (گروهان دوم) در یک رأس دلخواه جمع می‌شوند. گروهان اول همچنان طوری بازی می‌کنند که همگی روی $\pi_H(R)$ باقی بمانند.

(۳) در مرحله سوم، در هر دور گروهان دوم در G حرکتی می‌کند که به دزد نزدیک‌تر شود. اگر دزد روی G حرکت کرد یا اصلاً حرکت نکرد، گروهان اول حرکتی طبق استراتژی برنده روی G انجام می‌دهد. ولی اگر دزد روی H حرکت کرد، گروهان اول طوری حرکت می‌کند که تصویرش در H با دزد یکسان بماند. این مرحله وقتی تمام می‌شود که یا دزد توسط گروهان اول دستگیر بشود و یا گروهان دوم تصویرش در G با دزد یکسان شود. دقت کنید که دزد برای این که توسط گروهان اول دستگیر نشود نمی‌تواند نامتناهی حرکت در G انجام بدهد. در نتیجه بالاخره گروهان دوم تصویرش در G با دزد یکسان می‌شود و مرحله سوم تمام می‌شود.

(۴) در مرحله آخر، اگر دزد روی G حرکت کرد یا حرکت نکرد گروهان اول حرکتی طبق استراتژی برنده روی G انجام می‌دهد. ولی اگر دزد روی H حرکت کرد، گروهان اول طوری حرکت می‌کند که تصویرش در H با دزد یکسان بماند. اگر دزد روی H حرکت کرد یا حرکت نکرد گروهان دوم حرکتی طبق استراتژی برنده روی H انجام می‌دهد. ولی اگر دزد روی G حرکت کرد، گروهان اول طوری حرکت می‌کند که تصویرش در H با دزد یکسان بماند. این مرحله وقتی تمام می‌شود که دزد دستگیر بشود.

□

تعریف (شبکه $a \times b$ ، $(G_{a,b})$ the $a \times b$ grid). شبکه $a \times b$ که با $G_{a,b}$ نمایش داده می‌شود گرافی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(G_{a,b}) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b\}, \quad (i, j) \sim (k, l) \iff |i - k| + |j - l| = 1$$

△

مثال. شبکه 2×2 با C_2 یکریخت است. شبکه 3×3 در شکل ۲۲ و شبکه 4×4 در شکل ۲۱ نشان داده شده‌اند. ♥

نتیجه ۲-۹ شبکه $a \times b$ ، ۲-جستجوپذیر است.

□

اثبات. می‌توان دید که $G_{a,b} = P_a \square P_b$.

حاصل ضرب دکارتی تعداد بیشتری از گراف‌ها، تعمیمی طبیعی از حاصل ضرب دو تا از آن‌هاست:

تعریف (حاصل ضرب دکارتی چند گراف $(\square_{i=1}^k G_i)$ ، k -fold cartesian product). حاصل ضرب دکارتی گراف‌های

G_1, G_2, \dots, G_k که به صورت $\square_{i=1}^k G_i$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \times V(G_2) \times \dots \times V(G_k)$ است به

طوری که دو رأس $u = (u_1, u_2, \dots, u_k), v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ به هم متصلند اگر یک j وجود داشته باشد که برای هر $i \neq j$

△

$u_i = v_i$ و u_j, v_j در G_j مجاور باشند.

نتیجه ۳-۹ برای هر k گراف G_1, G_2, \dots, G_k داریم:

$$cn(\square_{i=1}^k G_i) \leq \sum_{i=1}^k cn(G_i)$$

□

اثبات. با دقت به این نکته که $G_1 \square G_2 \square G_3 \simeq (G_1 \square G_2) \square G_3$ و استقرا حکم ثابت می‌شود.

اگر گراف‌هایی که حاصل ضرب را می‌سازند گراف‌های خاصی باشند می‌توان کران‌های بهتری ارائه کرد:

قضیه ۴-۹ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k تعدادی دور به طول لااقل چهار و T_1, T_2, \dots, T_l تعدادی درخت با لااقل

دو رأس باشند. در این صورت داریم:

$$cn(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k \square T_1 \square T_2 \square \dots \square T_l) = k + \lceil \frac{l+1}{2} \rceil$$

قضیه ۵-۹ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k تعدادی گراف کامل با لااقل سه رأس باشند. در این صورت داریم

$$cn(\square_{i=1}^k G_i) = k$$

قضیه زیر کران پایینی برای عدد جستجوی حاصل ضرب چند گراف ارائه می‌دهد که از آن برای اثبات تساوی در قضیه ۴-۹

استفاده شده است.

قضیه ۶-۹ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k گراف‌هایی باشند به طوری که برای هر $u_i, v_i \in V(G_i)$ داشته باشیم

$$cn(\square_{i=1}^k G_i) \geq \lfloor \frac{\delta(\square_{i=1}^k G_i)}{2} \rfloor + 1$$
 در این صورت داریم

اثبات. فرض کنید $u = (u_1, u_2, \dots, u_k), v = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V(\square_{i=1}^k G_i)$ دو رأس دلخواه باشند و نشان می‌دهیم

$|N[u] \cap N[v]| \leq 2$. اگر u, v در بیش از دو مؤلفه با هم اختلاف داشته باشند، فاصله‌شان لااقل ۳ است و لذا همسایه مشترک

ندارند. اگر u, v در دقیقاً دو مؤلفه اشتراک داشته باشند، به راحتی می‌توان دید که مجاور نیستند و دقیقاً دو همسایه مشترک دارند.

اگر u, v در دقیقاً یک مؤلفه مانند مؤلفه زام اشتراک داشته باشند، آن‌گاه می‌توان دید که $|N[u] \cap N[v]| = |N[u_j] \cap N[v_j]| \leq 2$.

پس بنابر قضیه ۲-۵ داریم

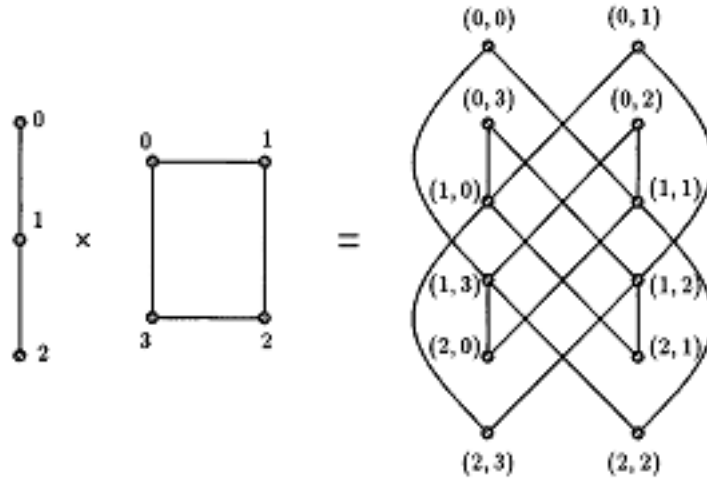
$$cn(\square_{i=1}^k G_i) \geq \lceil \frac{\delta(\square_{i=1}^k G_i) + 1}{2} \rceil$$

□

حال به یک ضرب گراف دیگری می‌پردازیم.

تعریف (حاصل ضرب رسته‌ای چند گراف $(\times_{i=1}^k G_i)$ ، k -fold categorial product) حاصل ضرب رسته‌ای گراف‌های G_1, G_2, \dots, G_k که با $\times_{i=1}^k G_i$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \times V(G_2) \times \dots \times V(G_k)$ است به طوری که دو رأس $u = (u_1, u_2, \dots, u_k), v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ به هم متصلند اگر برای هر i در G_i مجاور باشند. \triangle

مثال. در شکل ۱۸ مثالی از ضرب رسته‌ای دو گراف نشان داده شده است. \heartsuit



شکل ۱۸: مثالی از ضرب رسته‌ای (از [NN98] گرفته شده)

نکته. اگر گراف‌های G_1, G_2 دوبخشی و همبند باشند آن‌گاه $G_1 \times G_2$ ناهمبند می‌شود که مطلوب نیست. برای همین است که در قضایای زیر فرض می‌کنیم گراف‌ها دوبخشی نیستند. \diamond

قضیه ۷-۹ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k تعدادی گراف غیر دوبخشی باشند. در این صورت داریم:

$$(۱) \text{ اگر همه } G_i \text{ ها } ۱\text{-جستجوپذیر باشند، آن گاه } cn(\times_{i=1}^k G_i) \leq k + ۱$$

$$(۲) \text{ در غیر این صورت داریم } cn(\times_{i=1}^k G_i) \leq ۲ \sum_{i=1}^k cn(G_i) - \max\{cn(G_i)\} - k + ۱$$

اثبات ارائه شده برای قضیه بالا از استقرا روی k استفاده می‌کند.

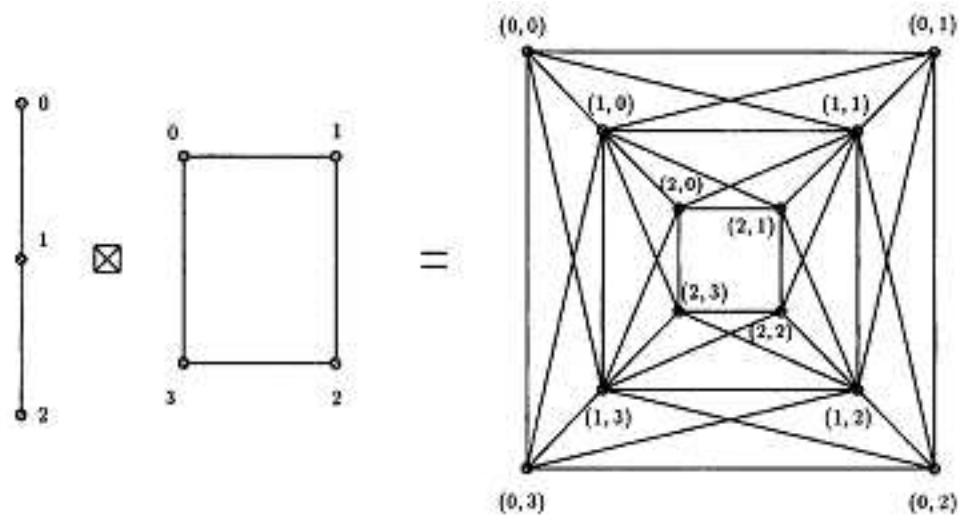
قضیه ۸-۹ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k تعدادی گراف کامل با لااقل سه رأس باشند. در این صورت داریم $cn(\times_{i=1}^k G_i) \leq [k/۲] + ۲$

و آخرین ضربی که بررسی می‌کنیم ضرب قوی است:

تعریف (ضرب قوی چند گراف $(\boxtimes_{i=1}^k G_i)$ ، k -fold strong product) حاصل ضرب قوی گراف‌های G_1, G_2, \dots, G_k که با $\boxtimes_{i=1}^k G_i$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \times V(G_2) \times \dots \times V(G_k)$ است به طوری که دو رأس $u = (u_1, u_2, \dots, u_k), v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ به هم متصلند اگر برای هر i در G_i مساوی و یا مجاور باشند. \triangle



مثال. در شکل ۱۹ مثالی از ضرب قوی دو گراف نشان داده شده است.



شکل ۱۹: مثالی از ضرب قوی (از [NN98] گرفته شده)

قضیه ۹-۹ ([NN98]) برای هر k گراف G_1, G_2, \dots, G_k داریم

$$cn(\boxtimes_{i=1}^k G_i) \leq \sum_{i=1}^k cn(G_i) - k + 1$$

قضیه ۹-۱۰ ([NN98]) فرض کنید G_1, G_2, \dots, G_k تعدادی دور به طول لااقل ۵ باشند. در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$cn(\boxtimes_{i=1}^k G_i) \leq k + 1$$

۱۰ گراف‌های نامتناهی

دسته پنجمی که بررسی می‌شوند گراف‌های نامتناهی هستند. بازی دزد و پلیس را می‌توان به صورت طبیعی برای گراف‌های نامتناهی نیز تعریف کرد. بسیاری از قضایای مربوط به گراف‌های متناهی (از جمله قضیه ۶-۳) در مورد گراف‌های نامتناهی صادق نیستند:

قضیه ۱۰-۱ ([HLSW02]) گراف نامتناهی وتری G وجود دارد که قطر آن ۲ است ولی ۱-جستجوپذیر نیست.

در حقیقت در مرجع مذکور ثابت شده است که برای هر عدد اصلی 3^0 نامتناهی که در نظر بگیریم، گرافی با آن تعداد رأس موجود است که در شرایط قضیه صدق می‌کند.

می‌دانیم گراف‌های کامل حتی اگر نامتناهی باشند ۱-جستجوپذیر هستند. در مورد درخت‌ها این نکته صادق نیست، مثلاً یک مسیر نامتناهی درختی است که ۱-جستجوپذیر نیست. یک مسئله جالب (که در [Hah07] به عنوان مسئله باز ذکر شده) پیدا

30) cardinality

کردن خانواده‌ای نابديهی از گراف‌های نامتناهی ۱-جستجوپذیر است. نویسندگان [BHT] چنین خانواده‌ای را معرفی کرده‌اند و با توجه به پیچیده بودن مثال آن‌ها، به نظر می‌رسد تعیین این که یک گراف نامتناهی دلخواه باید چه خواصی داشته باشد تا ۱-جستجوپذیر باشد، مسئلهٔ مشکلی است.

یک مقالهٔ مهم که خواص کلی عدد جستجو در گراف‌های نامتناهی با شمارا رأس را بررسی کرده است [BHW07] است که در ادامه مهم‌ترین نتایج ذکر شده در آن را می‌بینیم.

تعریف (خاصیت m -بستهٔ وجودی، strongly m -existentially closed property). می‌گوییم گراف G دارای خاصیت m -بستهٔ وجودی (یا m -e.c) است اگر به ازای هر زیرمجموعهٔ حداکثر m عضوی مانند A و هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند B از رؤس G ، رأس $z \notin A \cup B$ وجود داشته باشد که به تمام اعضای A وصل باشد و به هیچ رأسی از B وصل نباشد. Δ

قضیهٔ ۲-۱۰ ([BHW07]) فرض کنید G گرافی نامتناهی باشد. در این صورت:

(۱) اگر G خاصیت $e.c - 1$ داشته باشد آن گاه $cn(G)$ نامتناهی است.

(۲) اگر $cn(G)$ نامتناهی باشد آن گاه G خاصیت $e.c - \infty$ دارد.

اثبات.

(۱) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید c مأمور برای دستگیری دزد کافی باشد. در هر دور پس از حرکت مأمورین، دزد در رأسی مانند u و مأمورین در رؤوسی مانند v_1, v_2, \dots, v_c هستند. قرار می‌دهیم $A = \{u\}$ و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_c\}$. در نتیجه طبق خاصیت $e.c - 1$ رأس $z \notin A \cup B$ وجود دارد که به u وصل است و به هیچ رأسی از B وصل نیست. دزد به رأس z می‌رود و در دور بعدی دستگیر نمی‌شود. به همین ترتیب دزد می‌تواند تا ابد فرار کند. برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم در ابتدا دزد می‌تواند در رأسی شروع کند که در دور اول دستگیر نشود. اثبات این موضوع نیز با توجه به خاصیت $e.c - 1$ کار سختی نیست و از ایده‌ای مشابه استفاده می‌کند.

(۲) مجدداً از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر G خاصیت $e.c - \infty$ نداشته باشد به این معناست که زیرمجموعهٔ متناهی B از رؤس G هست که تمام رؤس G به لااقل یکی از رؤس B وصل هستند. حال اگر در هر رأس B یک مأمور قرار دهیم در همان حرکت اول دزد دستگیر می‌شود، در نتیجه $cn(G) \leq |B|$.

□

تعریف (حد دنباله‌ای از گراف‌ها، the limit of a chain of graphs و چگالی جستجو $(D(G, C))$ ، cop density و چگالی جستجوی بالایی $(UD(G))$ ، upper cop density). فرض کنید $C = (G_n : n \in \mathbb{N})$ دنباله‌ای از گراف‌های متناهی باشد که G_n زیرگرافی القایی از G_{n+1} است. گراف (احتمالاً نامتناهی) G که به صورت زیر تعریف می‌شود را حد دنبالهٔ $(G_n : n \in \mathbb{N})$ می‌نامیم.

$$V(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(G_n), \quad E(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(G_n)$$

چگالی جستجوی G نسبت به دنبالهٔ C را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$D(G, C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn(G_n)}{|V(G_n)|}$$

دقت کنید که اگر G گرافی نامتناهی باشد، می‌توان دنباله‌های متعددی ساخت که حدشان برابر G باشد و چگالی جستجو به آن دنباله بستگی دارد. چگالی جستجوی بالایی G را برابر سوپریمم (کوچک‌ترین کران بالای) چگالی جستجو برای تمام دنباله‌هایی که حدشان G است تعریف می‌کنیم و با $UD(G)$ نمایش می‌دهیم.

چند مثال ببینید:

- اگر P_n را مسیری با رئوس v_1, v_2, \dots, v_n بگیریم آن‌گاه دنباله $C = (P_n : n \in \mathbb{N})$ به گراف G که مجموعه رئوس آن $\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ و مجموعه یال‌های آن $\{v_i v_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$ است میل می‌کند و چون $cn(P_n) = 1$ پس $D(G, C) = 0$.
- اگر G را اجتماع نامتناهی تا C_4 مجزا در نظر بگیریم و G_n را اجتماع n تا C_4 اول در نظر بگیریم، برای هر n داریم $D(G, C) = 1/2$ و $cn(G_n)/|V(G_n)| = 2n/4n = 1/2$.
- اگر G گرافی کامل و نامتناهی باشد آن‌گاه $UD(G) = 0$ زیرا هر زیرگراف القایی G ، ۱-جستجوپذیر است.

قضیه ۳-۱۰ ([BHW07]) فرض کنید G گرافی نامتناهی با شمارا رأس باشد. در این صورت:

(۱) اگر G خاصیت $e.c - 1$ داشته باشد آن‌گاه برای هر $r \in [0, 1]$ ، دنباله C از گراف‌ها هست که حدش برابر G باشد و $D(G, C) = r$.

(۲) فرض کنید برای هر $r \in [0, 1]$ ، دنباله C از گراف‌ها باشد که حدش برابر G باشد و $D(G, C) = r$. در این صورت G خاصیت $e.c - 0$ دارد.

$$(3) \quad UD(G) \in \{0, 1\}$$

(۴) G خاصیت $e.c - 0$ دارد اگر و تنها اگر $UD(G) = 1$.

زمان جستجوی گرافها

۱۱ پیچیدگی محاسبه زمان جستجو

تعریف (زمان جستجو با c مأمور $(st_c(G))$ ، capture time search time using c cops). کمترین تعداد دوره‌های لازم برای دستگیری دزد در صورتی که پلیس از c مأمور استفاده کند را زمان جستجو با c مأمور می‌نامیم و با $st_c(G)$ نشان می‌دهیم. در این تعریف فرض بر این است که دزد دنباله‌ای از حرکات را انجام می‌دهد که بازی بیشترین مقدار ممکن طول بکشد. چنانچه گراف G ، c -جستجوپذیر نباشد قرار می‌دهیم $st_c(G) = \infty$.

چند مثال ببینید:

- عدد جستجوی گراف کامل با یک مأمور برابر ۱ است زیرا همان طور که دیدیم یک مأمور در یک حرکت می‌تواند دزد را دستگیر کند.

- عدد جستجوی P_n با یک مأمور برابر $\lfloor n/2 \rfloor$ است. اگر مأمور از رأس میانی شروع کند (اگر n زوج باشد مأمور از یکی از دو رأس میانی شروع می‌کند) می‌تواند با حداکثر $\lfloor n/2 \rfloor$ حرکت به دزد برسد و او را دستگیر کند. ولی اگر مأمور از رأس میانی شروع نکند، دزد می‌تواند از یکی از دو انتهای مسیر (که نسبت به مأمور دورتر است) شروع کند و ثابت بایستد، و بدین ترتیب مأمور در $\lfloor n/2 \rfloor$ حرکت نمی‌تواند به او برسد و دستگیرش کند.

در صورت ثابت بودن تعداد مأمورین، محاسبه سریع زمان جستجو ممکن است:

قضیه ۱۰-۱۱ ([HMG06]) برای عدد ثابت c و گراف ورودی G می‌توان مقدار $st_c(G)$ را در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد.

اثبات. الگوریتم ارائه شده برای $c = 1$ را در این جا بیان می‌کنیم و الگوریتم متناظر برای $c > 1$ نیز تقریباً مشابه است فقط کمی شلوغ‌تر است. فرض کنید $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. ایده اصلی استفاده از برنامه‌نویسی پویا^{۳۱} است، بدین ترتیب که یک آرایه $n \times n$ در نظر می‌گیریم که در درایه i, j آن نگه می‌داریم که اگر مأمور از u_i و دزد از u_j شروع کند و هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند پس از چند حرکت دزد دستگیر می‌شود. البته اگر G ۱-جستجوپذیر نباشد ممکن است مقدار برخی درایه‌ها بی‌نهایت بشود. یک نکته مهم این است که دو عدد i, j به طور یکتا وضعیت بازی را تعیین نمی‌کنند، چرا که نوبت بازی هم مهم است. بنابراین دو جدول $n \times n$ باید نگه داریم که یکی مربوط به وضعیتی است که نوبت حرکت با پلیس است (در الگوریتم این جدول با c نشان داده شده) و دیگری مربوط به وضعیتی که نوبت با دزد است (در الگوریتم با r نشان داده شده). با توجه به این توضیحات، الگوریتم را ببینید:

PROCEDURE compute_st_1

INPUT: graph G

OUTPUT: st_1(G)

31) dynamic programming

VARIABLES: arrays $c[n][n]$, $r[n][n]$, $st[n]$

```

for all i, j do
  set  $c[i][j] := \text{infinity}$ 
  set  $r[i][j] := \text{infinity}$ 
for all i do
  set  $c[i][i] := 0$ 
  set  $r[i][i] := 0$ 

repeat until no change occurs
  for all i, j do
    if  $c[i][j] = \text{infinity}$  then set  $c[i][j] := 1 + \min \{r[k][j] : u_k \text{ and } u_i \text{ are adjacent}\}$ 
    for all i, j do
      if  $r[i][j] = \text{infinity}$  then set  $r[i][j] := \max \{c[i][l] : u_l \text{ and } u_j \text{ are adjacent}\}$ 

for all i do
  set  $st[i] := \max \{c[i][j] : 1 \leq j \leq n\}$ 
return  $\min \{st[i] : 1 \leq i \leq n\}$ 

```

با توجه به این که هر آرایه n^2 درایه دارد و هر درایه وقتی یک بار مقداردهی شد دیگر تغییر نمی‌کند، حلقه repeat حداکثر $O(n^2)$ بار اجرا می‌شود و هر بار که اجرا می‌شود $O(n^2)$ عملیات انجام می‌دهد. در نتیجه زمان اجرای الگوریتم $O(n^4)$ است. در حالت $c > 1$ با استدلالی مشابه می‌توان دید که حافظه مصرفی الگوریتم $O(n^{c+1})$ و زمان اجرای آن $O(n^{c+2})$ می‌باشد. □

نتیجه ۲-۱۱ برای عدد ثابت c و گراف ورودی G می‌توان در زمان چندجمله‌ای تعیین کرد که آیا $cn(G) \leq c$ یا خیر.

اثبات. کافی است به این نکته توجه شود که $cn(G) \leq c$ اگر و تنها اگر $st_c(G)$ بی‌نهایت نباشد. □
از قضیه قبل می‌دانیم که برای هر عدد ثابت c ، محاسبه $st_c(G)$ برای گراف ورودی G در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. یعنی مسئله زیر سریعاً قابل حل است: تعداد مأمورین ثابت است. برای دستگیری دزد حداقل چند حرکت لازم است؟ مسئله دوگان آن به طور طبیعی بدین صورت مطرح می‌شود: می‌خواهیم در زمان ثابتی دزد را دستگیر کنیم. حداقل چند مأمور لازم است؟ این منشأ تعریف زیر است:

تعریف ($cn_t(G)$). برای هر t کم‌ترین تعداد مأمورین لازم برای دستگیری دزد در حداکثر t دور با $cn_t(G)$ نشان داده می‌شود.

△

ولی برخلاف st_c ، پارامتر cn_t برای هر t ثابت به سرعت قابل محاسبه نیست:

32) dual problem

قضیه ۳-۱۱ ([BGHK]) برای هر عدد ثابت t ، مسئله محاسبه $cn_t(G)$ برای گراف داده شده G مسئله NP -complete است.

۱۲ کرانهایی برای زمان جستجو

کرانهایی زیادی برای زمان جستجو برحسب پارامترهای گراف در دست نیست، البته در مورد گرافهای ۱-جستجوپذیر مطالعاتی انجام شده است.

تعریف ($st_c(n)$). ماکسیمم زمان جستجو با c مأمور در بین گرافهای n رأسی و c -جستجوپذیر با $st_c(n)$ نمایش داده می شود.

شهود ما می گوید که اگر بتوان با تعدادی مأمور دزدی را در گرافی n رأسی دستگیر کرد، آن گاه می توان این کار را در $O(n)$ حرکت انجام داد، ولی در حالت کلی بهترین کران مجانبی^{۳۳} ارائه شده کران زیر است که معمولاً خیلی با مقدار واقعی زمان جستجو فاصله دارد:

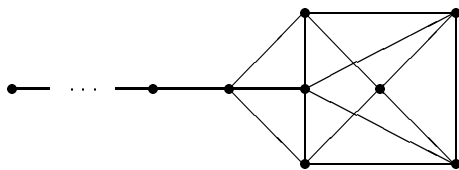
$$\text{قضیه ۱-۱۲} \quad \text{داریم } st_c(n) \leq n^{c+1}.$$

اثبات. در پایان هر دور می توان وضعیت دزد و مأمورین را به صورت یک $c+1$ تایی مرتب $(u, v_1, v_2, \dots, v_c)$ نشان داد که u مکان دزد و v_1, v_2, \dots, v_c مکان مأمورین را نشان می دهند. اگر پلیس بهترین بازی خود را انجام دهد، یک وضعیت دو بار پیش نمی آید، زیرا اگر در پایان یک دور وضعیتی پیش بیاید که قبلاً هم پیش آمده بود، و دزد و مأمورین در ادامه این وضعیت همان حرکت های وضعیت قبلی را انجام دهند دزد هرگز دستگیر نمی شود. نتیجه می گیریم تعداد دوره های بازی از تعداد کل وضعیت های ممکن، که n^{c+1} تا است کم تر است.

مقدار $st_1(n)$ دقیقاً محاسبه شده است:

$$\text{قضیه ۲-۱۲ ([Gav08])} \quad \text{اگر } n \geq 7, \text{ آن گاه } st_1(n) = n - 4 \text{ و برای } n < 7, \text{ داریم } st_1(n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

نکته. برای $n < 7$ گراف P_n در تساوی صدق می کند. برای $n \geq 7$ یک مثال که در آن تساوی اتفاق می افتد گراف شکل ۲۰ است.



شکل ۲۰: گراف ۱-جستجوپذیر با ماکسیمم زمان جستجو

در مورد گرافهای وتری (که شامل درختها هم هستند)، کران بهتری وجود دارد:

$$\text{قضیه ۳-۱۲ ([BGHK])} \quad \text{اگر } G \text{ گرافی وتری باشد آن گاه } st_1(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

33) asymptotic bound

◇

نکته. این یک کران تنگ است زیرا $st_1(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

یافتن کران پایین برای $st_c(n)$ هم مسئله جالبی است. نگارنده ثابت کرده است برای هر c ، عدد ثابت a_c وجود دارد به طوری که برای هر n داریم $st_c(n) \geq n/2 + a_c$. برای اثبات این موضوع ابتدا دو لم ثابت می‌کنیم.

لم ۴-۱۲ فرض کنید G_1, G_2 گرافهایی با خاصیت $cn(G_1), cn(G_2) \geq c$ باشند و G گرافی باشد که از وصل کردن دو رأس دلخواه از G_1, G_2 با مسیری به طول d حاصل شده باشد. در این صورت $st_c(G) \geq d/2$.

اثبات. گرافهای G_1, G_2 را به عنوان زیرگرافهایی از G در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $c-1$ مأمور نمی‌تواند دزد را دستگیر کنند حتی اگر او هرگز از G_1 خارج نشود. فرض کنید سریع‌ترین استراتژی مأمورین این باشد که از رؤس (v_1, v_2, \dots, v_c) شروع کنند. در نتیجه همه آنها باید بتوانند در حداکثر $st_c(G)$ حرکت به G_1 برسند، لذا مثلاً داریم $d(v_1, V(G_1)) \leq st_c(G)$ و مشابهاً $d(v_1, V(G_2)) \leq st_c(G)$. پس $d = d(V(G_1), V(G_2)) \leq 2st_c(G)$ و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۵-۱۲ فرض کنید $v \in V(Q_{2d})$ رأس دلخواهی باشد. در این صورت $d+1$ مأمور می‌توانند طوری در Q_{2d} دزد را دستگیر کنند که در طول بازی، در صورتی که دزد وارد v شد فوراً دستگیر بشود.

اثبات. دقت کنید که $Q_{2d} \simeq Q_{2d-1} \square P_2$ و لذا رؤس Q_{2d} را می‌توان به صورت دوتایی‌های (u, w) نمایش داد که $u \in V(Q_{2d-1})$ و $w \in \{w_0, w_1\}$. در اینجا فرض کرده‌ایم که $V(P_2) = \{w_0, w_1\}$. مجموعه رؤوسی که مؤلفه دومشان w_0 است را A و مجموعه بقیه رؤس را B می‌نامیم. به دلیل تقارن می‌توان فرض کرد $v \in A$. تابع $\pi_A : V(Q_{2d}) \rightarrow A$ را با ضابطه $\pi_A(u, w) = (u, w_0)$ تعریف می‌کنیم. مکان دزد را با R و تصویر مکان دزد تحت این نگاشت را با $\pi_A(R)$ نشان می‌دهیم. مأمورین را با C_1, C_2, \dots, C_{d+1} نشان می‌دهیم و استراتژی زیر که از دو مرحله تشکیل شده حکم را ثابت می‌کند:

(۱) همه مأمورین از v شروع می‌کنند. مأمور C_1 در طول مرحله اول در v باقی می‌ماند و مأمورین C_2, C_3, \dots, C_{d+1} می‌روند و $\pi_A(R)$ را دستگیر می‌کنند. با توجه به این که $cn(Q_{2d-1}) = d$ (نتیجه ۲-۸ را ببینید) آنها می‌توانند این کار را انجام دهند. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید مأموری که در رأس $\pi_A(R)$ قرار گرفته است C_{d+1} باشد. در اینجا مرحله اول تمام می‌شود.

(۲) در مرحله دوم، C_{d+1} همواره در $\pi_A(R)$ باقی می‌ماند (این کار ممکن است زیرا π_A در واقع یک انقباض است) و در نتیجه دزد به محض ورود به A دستگیر خواهد شد. مأمورین C_1, C_2, \dots, C_d به B می‌روند و خود دزد را دستگیر می‌کنند. دقت کنید که $B \simeq Q_{2d-1}$ و لذا $cn(B) = d$ پس آنها می‌توانند این کار را انجام دهند.

با توجه به این که در مرحله اول C_1 از v محافظت می‌کند و در مرحله دوم C_{d+1} از v محافظت می‌کند، دزد در طول بازی هرگاه وارد v شود قبلاً یک مأمور در آنجا هست و او را فوراً دستگیر می‌کند. □

قضیه ۶-۱۲ برای هر c, n داریم $st_c(n) > (n/2) - 4^{c-1}$.

اثبات. فرض کنید A, B دو گراف مجزا و یکریخت با Q_{2c-2} باشند. دو رأس دلخواه از A, B را با مسیری به طول $n + 2^{2c-1} + 1$ به هم وصل می‌کنیم تا گراف G به دست آید. یک استراتژی برای دستگیری دزد با c مأمور به شکل زیر می‌توان معرفی کرد: مأمورین از رأس دلخواهی در میانه مسیر شروع می‌کنند، و با توجه به این که دزد در A یا B قرار گرفته به سمت

یک از آن دو حرکت می‌کنند تا به آن برسند. فرض کنیم دزد در A باشد. حال با توجه به لم قبل، می‌توانند طوری بازی کنند که در A دزد را دستگیر کنند بدون این که اجازه دهند دزد از طریق رأسی که A را به مسیر اتصال می‌دهد از A فرار کند. از طرف دیگر طبق لم ۴-۱۲ داریم:

$$st_c(n) \geq st_c(G) \geq (n - 2^{2^c-1} + 1)/2 > (n/2) - 4^{c-1}$$

□

در برخی از مقالاتی که کران‌های بالا برای عدد جستجوی گراف‌های خاص ارائه شده، استراتژی‌های برای پلیس معرفی شده که با مطالعه دقیق‌تر این استراتژی‌ها می‌توان کران‌هایی برای زمان جستجوی این گراف‌ها ارائه کرد. به عنوان مثال با بررسی مجدد استراتژی ارائه شده در [AF84]، دیده می‌شود که برای هر گراف مسطح G داریم $st_{\forall}(G) \in O(n^2)$.

تعریف (زمان جستجو) $(st(G))$ ، **search time**، **capture time**. منظور از زمان جستجوی گراف G ، همان $st_{cn}(G)$ است و به طور خلاصه با $st(G)$ نشان داده می‌شود.

△

مثال‌های زیر را ببینید:

- زمان جستجوی K_n (یا هر گراف دیگری که رأسی داشته باشد که به همه رئوس وصل باشد) برابر ۱ است.
- زمان جستجوی P_n برابر $\lfloor n/2 \rfloor$ است.
- زمان جستجوی C_n برابر $\lfloor (n+1)/4 \rfloor$ است.

نگارنده هم‌چنین بر روی محاسبه زمان جستجوی حاصل ضرب دکارتی چند درخت کار کرده و نتایج به دست آمده را در زیر می‌بینید.

قضیه ۷-۱۲ برای هر درخت T داریم $st(T) = \lfloor diam(T)/2 \rfloor$.

قضیه ۸-۱۲ اگر T_1 و T_2 دو درخت لااقل دو رأسی باشند آن‌گاه داریم

$$st(T_1) + st(T_2) - 1 \leq st(T_1 \square T_2) = \lfloor diam(T_1 \square T_2)/2 \rfloor \leq st(T_1) + st(T_2)$$

◇

نکته. برای هر دو گراف همبند G, H داریم $diam(G \square H) = diam(G) + diam(H)$.

نتیجه ۹-۱۲ اگر $m, n > 1$ آن‌گاه $st(G_{m,n}) = \lfloor (m+n)/2 \rfloor - 1$.

قضیه ۱۰-۱۲ اگر T_1, T_2, T_3 درخت‌های لااقل دو رأسی باشند، آن‌گاه داریم

$$diam(T_1 \square T_2 \square T_3)/2 \leq st_{\forall}(T_1 \square T_2 \square T_3) \leq diam(T_1 \square T_2 \square T_3) + 1$$

قضیه ۱۱-۱۲ اگر T_1, T_2, \dots, T_k درخت‌های لااقل دو رأسی باشند، آن‌گاه داریم

$$st(\square_{i=1}^k T_i) \leq \sum_{i=1}^k (2^{\lfloor i/2 \rfloor} - 1) diam(T_i) \leq (2^{\lfloor k/2 \rfloor} - 1) diam(\square_{i=1}^k T_i)$$

تعریف (عدد غلبه‌ای به فاصله r $(\gamma_r(G))$ ، distance- r domination number). برای هر عدد طبیعی r تاکید عدد غلبه‌ای به فاصله r گراف G را برابر با اندازه کوچک‌ترین مجموعه A از رئوس G تعریف می‌کنیم که داشته باشیم $V(G) \subset N_r[A]$. این عدد را با $\gamma_r(G)$ نمایش می‌دهیم.

△

♡

مثال. اگر P گراف پترسن باشد (شکل ۲ را ببینید) آن‌گاه $\gamma_1(P) = 1$, $\gamma_2(P) = 2$, $\gamma_3(P) = 3$.

قضیه ۱۲-۱۲ ([ADHY08]) برای هر G داریم $cn_r(G) \geq \gamma_r(G)$ و در صورتی که $r = 1$ و یا طول کوتاه‌ترین دور G لااقل $4r - 1$ باشد تساوی رخ می‌دهد.

بخش ث

گونه‌های دیگر

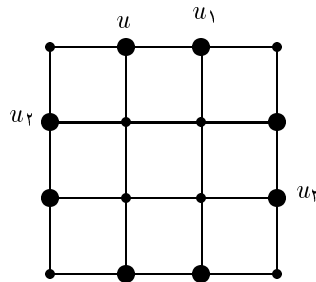
۱۳ دزد سریع‌تر

تعریف ($cn^s(G)$). برای یک عدد ثابت $s > 0$ ، فرض کنید دزد در هر حرکت مجاز باشد از طریق یک مسیر به طول حداکثر s که در هیچ یک از رئوس آن مأموری نیست به رأس دیگری نقل مکان کند. حداقل تعداد مأمورین لازم برای دستگیری دزد در این گونه را با $cn^s(G)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین تعریف می‌کنیم $cn^\infty(G) = cn^n(G)$.

نکته. به وضوح در هر گراف G داریم $cn(G) = cn^1(G) \leq cn^2(G) \leq \dots \leq cn^\infty(G)$.

مثال. شبکه 4×4 (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید. از نتیجه ۹-۲ می‌دانیم $cn^1(G_{4,4}) = 2$. ادعا می‌کنیم $cn^\infty(G_{4,4}) > 2$. فرض

کنید سرعت دزد برابر ۱۶ باشد و دو مأمور در بازی باشند. مجموعه رئوس پررنگ در شکل ۲۱ را V_1 بنامید. نشان می‌دهیم دزد می‌تواند طوری بازی کند که در پایان همه دورها در V_1 قرار داشته باشد. در ابتدای بازی که مأمورین در گراف مستقر می‌شوند، هر مأمور حداکثر دو رأس V_1 را کنترل می‌کند پس دزد می‌تواند در رأسی که کنترل نمی‌شود شروع کند و در دور اول دستگیر نمی‌شود. در هر دور پس از حرکت پلیس، دزد روی یکی از رئوس V_1 است؛ مثلاً فرض کنید در u باشد. از بین رئوس u_1, u_2, u_3 حداکثر دو تایشان توسط مأمورین کنترل می‌شوند، فرض کنید u_k کنترل نمی‌شود ($1 \leq k \leq 3$). می‌توان دید که سه مسیر مجزا از u به u_k وجود دارد که حداکثر دو تا از آنها توسط پلیس مسدود شده است. در نتیجه دزد می‌تواند با سرعت زیاد خود به u_k برود و در دور بعد هم دستگیر نشود. با تکرار همین استراتژی در دوره‌های بعدی دزد می‌تواند تا ابد فرار کند.



شکل ۲۱: شبکه 4×4

قضایای ۱-۳، ۲-۳ و ۳-۳ در حقیقت برای این گونه (که تعمیمی از حالت کلاسیک است) اثبات شده‌اند. در این جا مهم‌ترین‌شان را تکرار می‌کنیم:

قضیه ۱۰-۱۳ ([FGK08]) برای هر $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ، محاسبه $cn^s(G)$ برای گراف داده شده G مسئله‌ای NP -hard است و اگر $P \neq NP$ ، ثابت $c > 0$ موجود است که الگوریتم تقریبی با ضریب $c \log n$ برای آن وجود ندارد.

این گونه اولین بار در [NS08] مطالعه شد و مشخص شد که قضیه ۱-۷، که بیان می‌کند cn^1 گراف‌های مسطح حداکثر ۳

است، برای $s > 1$ برقرار نیست:

قضیه ۲-۱۳ (NS08) داریم $cn^s(G_{n,n}) \in \Omega(\sqrt{\log n})$.

اثبات ارائه شده برای این قضیه در واقع یک استراتژی فرار پیچیده برای دزد می‌باشد. می‌دانیم که وجود یک شبکه بزرگ به عنوان کهاد در یک گراف باعث بزرگ شدن پهنای درختی آن گراف می‌شود. پرسشی که در [NS08] مطرح شده این است که آیا چنین شمولى باعث بزرگ شدن cn^s نیز می‌شود؟ و قضیه زیر نشان می‌دهد که پاسخ منفی است.

قضیه ۳-۱۳ (NS08) برای هر عدد n گراف مسطح H وجود دارد که $G_{n,n} \preceq H$ ولی $cn^s(H) \leq 2$.

ولی داشتن یک شبکه بزرگ به عنوان زیرگراف القایی باعث زیاد شدن cn^s می‌شود:

قضیه ۴-۱۳ (NS08) اگر گراف مسطح H دارای $G_{n,n}$ به عنوان زیرگراف القایی باشد آن‌گاه $cn^s(H) \in \Omega(\sqrt{\log n})$.

پرسشی که ممکن است برای خواننده پیش بیاید این است که چرا گونه‌ای از بازی که در آن مأمورین سریع‌تر از دزد حرکت می‌کنند معرفی نشده است؟ پاسخ با کمی تأمل روشن می‌شود: در چنین گونه‌ای هر گرافی ۱-جستجوپذیر می‌شود! مثلاً در حالتی که سرعت مأمورین دو واحد و سرعت دزد یک واحد باشد، یک مأمور بدین ترتیب می‌تواند دزد را در هر گرافی دستگیر کند: او در هر دور از بین رئوس که امکان رفتن به آن‌ها را دارد، به رأسی می‌رود که فاصله‌اش با دزد مینیمم باشد. بدین ترتیب فاصله دزد و مأمور لااقل دو واحد کم می‌شود. دزد در نوبت خود می‌تواند حداکثر یک واحد فاصله‌اش را تا مأمور زیاد کند. بنابراین در پایان هر دور فاصله مأمور و دزد لااقل یک واحد کم می‌شود پس در حداکثر n دور دزد دستگیر خواهد شد.

۱۴ دزد نامرئی

در بازی دزد و پلیس (گونه اصلی) بازی با اطلاعات کامل صورت می‌گیرد یعنی مأمورین و دزد در تمام طول بازی از مکان یک‌دیگر آگاه هستند. در گونه تحت عنوان دزد نامرئی^{۳۴} پلیس از مکان دزد مطلع نیست ولی دزد از مکان مأمورین اطلاع دارد.

تعریف (عدد کاوش $(bcn(G))$). کم‌ترین تعداد مأمور لازم برای دستگیری یک دزد نامرئی در گراف G را عدد کاوش G می‌نامیم و با $bcn(G)$ نمایش می‌دهیم. گراف G را c -کاوش‌پذیر می‌گوییم اگر $bcn(G) \leq c$.

نکته. با توجه به این که می‌خواهیم استراتژی پلیس تضمین‌شده باشد، $bcn(G)$ مأمور باید بتوانند به ازای هر دنباله‌ای از حرکات که دزد انجام می‌دهد او را دستگیر کنند. در نتیجه حتی می‌توان فرض کرد که دزد از استراتژی پلیس آگاه است و حرکاتش را بر مبنای آن تعیین می‌کند.

چند مثال ببینید:

- هر مسیری ۱-کاوش‌پذیر است زیرا یک مأمور کافی است از یک سر مسیر شروع کند و به سر دیگر آن برود، دزد بالاخره دستگیر می‌شود.

34) zero-visibility cops and robber, cops with zero visibility

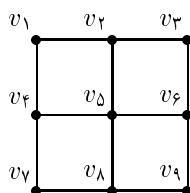
• عدد کاوش K_3 برابر ۲ است زیرا اگر فقط یک مأمور وجود داشته باشد و استراتژی آن مأمور چنان باشد که رئیس را به ترتیب معینی طی کند، ممکن است دزد که از استراتژی پلیس آگاه است همواره به رأسی برود که مأمور قصد وارد شدن به آن را ندارد. ولی اگر دو مأمور وجود داشته باشند، هر دو از یک رأس شروع می‌کنند و در دور اول به دو رأس متمایز می‌روند. دزد هر جا باشد حتماً دستگیر می‌شود.

• برای $n \geq 3$ داریم $bcn(C_n) = 2$ زیرا یک مأمور که به وضوح نمی‌تواند دزد را دستگیر کند، و دو مأمور هم می‌توانند دزد را دستگیر کنند: کافی است یکی از آن‌ها ثابت بایستد و دیگری یک دور کامل بزند.

این گونه نخستین بار در [Tan04] معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. برای آشنایی بیشتر خواننده با این گونه، قضیه‌ای که در [Tan04] به عنوان مثال ذکر شده را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۱۴ ([Tan04]) شبکه 3×3 ، ۲-کاوش‌پذیر است.

اثبات. رئیس این شبکه را همانند شکل ۲۲ نام‌گذاری کنید. یک استراتژی برای دو مأمور معرفی می‌کنیم که حتماً منجر به دستگیری دزد می‌شود. استراتژی را به صورت دور به دور بیان می‌کنیم. مکان دو مأمور در پایان دور i ام را با P_i نشان می‌دهیم، و مجموعه رئوسی که دزد در پایان i ام ممکن است در آن‌ها باشد (به شرط این که تا این دور دستگیر نشده باشد) را با R_i نشان می‌دهیم:



شکل ۲۲: شبکه 3×3

1. $P_1 = \{v_1, v_3\}, R_1 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$
2. $P_2 = \{v_2, v_6\}, R_2 = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$
3. $P_3 = \{v_1, v_5\}, R_3 = \{v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$
4. $P_4 = \{v_4, v_6\}, R_4 = \{v_5, v_7, v_8, v_9\}$
5. $P_5 = \{v_5, v_9\}, R_5 = \{v_4, v_7, v_8\}$
6. $P_6 = \{v_4, v_8\}, R_6 = \{v_7\}$
7. $P_7 = \{v_7, v_9\}, R_7 = \{\}$

□

حال به بیان نتایج کلی‌تر می‌پردازیم.

قضیه ۲-۱۴ ([Tan04]) ۱) برای هر G داریم $bcn(G) > \delta(G)/2$

۲) اگر G بدون مثلث باشد آن گاه $bcn(G) \geq \delta(G)$

اثبات.

۱) فرض کنید $c = bcn(G)$ و دزد به شیوه زیر حرکت می‌کند: در هر دور اگر مأموری قصد ورود به رأس فعلی‌اش نداشت همان‌جا می‌ماند وگرنه به رأسی که می‌رود که می‌داند مأموری در دور بعد قصد ورود به آن را ندارد. فرض کنید دزد در رأس u قرار داشته باشد و مأمورین در v_1, v_2, \dots, v_c باشند. در چنین وضعیتی دزد می‌تواند به هر یک از رؤس $N[u]$ که تعدادشان لااقل $\delta(G) + 1$ تاست برود. فرض کنید مأمورین پس از حرکت دزد به رؤس v'_1, v'_2, \dots, v'_c حرکت می‌کنند. اگر $N[u] \not\subset \{v_1, v_2, \dots, v_c, v'_1, v'_2, \dots, v'_c\}$ ، آن‌گاه دزد می‌تواند به رأس امنی در $N[u]$ فرار کند و لااقل یک دور دیگر دستگیر نشود. در نتیجه اگر داشته باشیم $1 + \delta(G) < 2c$ ، دزد می‌تواند بدین ترتیب تا ابد فرار کند. نتیجه می‌گیریم که

$$bcn(G) = c \geq \frac{\delta(G) + 1}{2} > \frac{\delta(G)}{2}$$

۲) شیوه حرکت دزد همانند بالاست. در اینجا نکته این است که چون G مثلث ندارد برای هر $1 \leq i \leq c$ داریم $|N(u) \cap \{v_i, v'_i\}| \leq 1$. در نتیجه چون دزدی که چنین شیوه‌ای را اتخاذ می‌کند بالاخره دستگیر می‌شود، برای لااقل یک u داریم $N(u) \subset \{v_1, v_2, \dots, v_c, v'_1, v'_2, \dots, v'_c\}$ که نتیجه می‌شود $c \leq |N(u)| \leq \delta(G)$

□

نتیجه ۳-۱۴ ([Tan04]) برای هر n داریم $bcn(K_n) = \lceil n/2 \rceil$

اثبات. از قضیه بالا (قسمت اول) داریم $bcn(K_n) \geq \lceil n/2 \rceil$ استراتژی زیر برای $c = \lceil n/2 \rceil$ مأمور یک دزد نامرئی را دستگیر می‌کند: مأمورین از c رأس متمایز دلخواه شروع می‌کنند و در دور اول به $n - c$ رأس دیگر حرکت می‌کنند طوری که همه رؤس را بپوشانند. مطمئناً دزد در دور اول دستگیر می‌شود.

تعریف (گراف کامل دوبخشی $(K_{a,b})$ ، complete bipartite graph). فرض کنید A, B دو مجموعه دلخواه با اندازه‌های a, b باشند. گراف $K_{a,b}$ مجموعه رؤسش $A \cup B$ است و هر رأس از A به هر رأس از B وصل است و هیچ یال دیگری وجود ندارد.

△

نتیجه ۴-۱۴ ([Tan04]) فرض کنید $a \leq b$ داریم $bcn(K_{a,b}) = a$

اثبات. گراف $K_{a,b}$ دوبخشی است پس مثلث ندارد پس طبق قضیه بالا (قسمت دوم) داریم $bcn(K_{a,b}) \geq \delta(K_{a,b}) = a$ یک استراتژی برای a مأمور به طریق زیر می‌توان معرفی کرد: مجموعه B را می‌توان به $k = \lceil a/b \rceil$ مجموعه مانند B_1, B_2, \dots, B_k افراز کرد به طوری که همه B_i ها به جز احتمالاً B_k دقیقاً a عضو داشته باشند. مأمورین در رؤس متمایز A قرار می‌گیرند. آن‌ها در دور اول به رؤس متمایزی از B_1 می‌روند و در دور دوم به رؤس متمایزی از A برمی‌گردند. در دور سوم به رؤس متمایزی از B_2 می‌روند و در دور چهارم برمی‌گردند. به همین ترتیب طی $2k$ دور کل گراف را پوشش می‌دهند و با کمی دقت می‌توان دریافت که دزد در طی این $2k$ دور دستگیر خواهد شد.

□

صورت قوی‌تری از قضیه ۵-۶ درباره عدد کاوش برقرار است:

قضیه ۵-۱۴ ([Tan04]) فرض کنید H زیرگرافی از G باشد به طوری که برای هر دو رأس u, v از آن داریم $d_H(u, v) = d(u, v)$ در این صورت داریم $bcn(H) \leq bcn(G)$.

تعریف (عدد خوشه‌ای $(\omega(G))$, clique number). اندازه بزرگ‌ترین زیرگراف کامل G را عدد خوشه‌ای نامیده و با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال. عدد خوشه‌ای گراف پترسن (شکل ۲) برابر ۲ و عدد خوشه‌ای گراف شکل ۱۱ برابر ۳ است.

نتیجه ۶-۱۴ برای هر G داریم $bcn(G) \geq \lceil \omega(G)/2 \rceil$.

نکته. این بهترین کران ممکن برحسب عدد خوشه‌ای است. در واقع برای گراف‌های بازه‌ای تساوی رخ می‌دهد (قضیه ۱۳-۱۴ را ببینید).

اثبات. فرض کنید H بزرگ‌ترین زیرگراف کامل G باشد و اندازه‌اش w باشد. چون فاصله هر دو رأس H برابر ۱ است، به وضوح شرایط قضیه قبل برقرار است، و در نتیجه $bcn(G) \geq bcn(H) = bcn(K_w) = \lceil w(G)/2 \rceil$.

نتیجه ۷-۱۴ اگر H انقباضی از G باشد آن‌گاه $bcn(H) \leq bcn(G)$.

اثبات. فرض کنید $f : V(G) \rightarrow V(H)$ یک تابع انقباضی باشد. نشان می‌دهیم که شرایط قضیه ۵-۱۴ برقرار است. فرض کنید u, v دو رأس از H باشند و $P = uu_1u_2 \dots u_{d-1}v$ یک کوتاه‌ترین مسیر بین u, v باشد. در این صورت با حذف رئوس تکراری متوالی از $P' = f(u)f(u_1)f(u_2) \dots f(u_{d-1})f(v)$ یک گشت به طول حداکثر d به دست می‌آید که فقط از رئوس H استفاده می‌کند و u, v را به هم متصل می‌کند. در نتیجه داریم $d_H(u, v) \leq d(u, v)$. نامساوی دیگر یعنی $d(u, v) \leq d_H(u, v)$ با توجه به این نکته که H زیرگرافی از G است واضح می‌باشد. از طرف دیگر در تناظر با قضیه ۱۳-۴ نتیجه ضعیف زیر را داریم:

قضیه ۸-۱۴ ([Tan04]) فرض کنید u, v دو رأس مجاور G باشند و H زیرگراف القا شده توسط $V(G) - \{u, v\}$ باشد. در این صورت $bcn(G) \leq bcn(H) + 1$.

اثبات. یک استراتژی ممکن برای $bcn(H) + 1$ مأمور به شرح زیر است: یک مأمور مداوماً از u به v و برعکس حرکت می‌کند و $bcn(H)$ مأمور دیگر روی H از استراتژی خود پیروی می‌کنند گویی اصلاً رئوس u, v وجود ندارند. در طول بازی هر گاه دزد به u یا v وارد شود در همان دور یا دور بعد توسط مأمور اول دستگیر می‌شود، و اگر همیشه در H باقی بماند آن‌گاه توسط بقیه مأمورین دستگیر می‌شود.

حال به بررسی ارتباط عدد کاوش و کهداها می‌پردازیم (برای تعریف مفهوم کهدا صفحه ۹ را ببینید).

قضیه ۹-۱۴ ([Tan04]) برای هر یال e از G داریم $bcn(G/e) \leq bcn(G)$.

ممکن است تصور شود که نتیجه فوق ثابت می‌کند اگر $H \preceq G$ آن‌گاه عدد کاوش H از G بیشتر نیست، ولی متأسفانه با حذف یال عدد کاوش یک گراف لزوماً کم نمی‌شود! در [Tan04] با سه مثال نشان داده شده که اگر e یالی از G باشد، آن‌گاه $bcn(G - e)$ می‌تواند کوچک‌تر از، مساوی با، یا بزرگ‌تر از $bcn(G)$ باشد.

همان گونه که عدد جستجو کران بالایی خطی برحسب پهناى درختى گراف دارد (قضیه ۱۰-۴ را ببینید)، عدد کاوش نیز کران بالایی خطی برحسب پهناى مسیری دارد. ابتدا این مفهوم را تعریف می‌کنیم.

تعریف (تجزیه مسیری، path-decomposition و پهناى مسیری ($pw(G)$ ، path-width). یک تجزیه مسیری G یک دنباله (W_1, W_2, \dots, W_k) از زیرمجموعه‌های $V(G)$ است به طوری که سه خاصیت زیر برقرارند:

(۱) هر رأس G عضو لااقل یکی از W_i هاست.

(۲) برای هر دو رأس مجاور u, v از G ، لااقل یک i هست که $u, v \in W_i$.

(۳) برای هر رأس u از G ، مجموعه $\{i : u \in W_i\}$ یک زیربازه از $\{1, 2, \dots, k\}$ است.

پهناى یک تجزیه مسیری را برابر $\max\{|W_i| - 1 : 1 \leq i \leq k\}$ تعریف می‌کنیم. پهناى مسیری G را برابر با مینیمم پهناى تمام تجزیه‌های مسیری ممکن G تعریف کرده و با $pw(G)$ نشان می‌دهیم.

△

نکته. تعریف تجزیه مسیری در واقع همان تعریف تجزیه درختی است با این شرط اضافه که T مسیر باشد.

◇

قضیه ۱۰-۱۴ ([Tan04]) برای هر G داریم $bcn(G) \leq pw(G) + 1$.

نکته. مثالی پیدا نشده که نشان دهد کران قضیه قبل تنگ است، ولی کران بهتری نیز برحسب پهناى مسیری پیدا نشده است

◇

[Tan04]

در [Tan04] هم‌چنین ساختار گراف‌هایی که با یک مأمور می‌توان دزدی نامرئی را گرفت تعیین شده است:

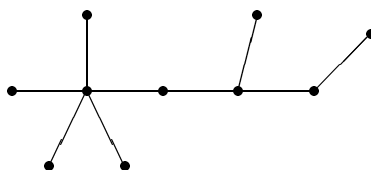
تعریف (گراف کرم ابریشم، caterpillar graph). گراف G را کرم ابریشم می‌خوانیم اگر درخت باشد و یک مسیر P در

△

G باشد که هر رأسی، یا در P باشد یا با رأسی از P مجاور باشد.

♡

مثال. در شکل ۲۳ یک گراف کرم ابریشم را می‌بینید.



شکل ۲۳: یک گراف کرم ابریشم

قضیه ۱۱-۱۴ ([Tan04]) گراف G ، ۱-کاوش‌پذیر است اگر و تنها اگر کرم ابریشم باشد.

◇

نکته. اثبات ارائه شده در صفحه ۲۴ از [Jel06] برای این قضیه کوتاه‌تر و ساده‌تر است.

هم‌چنین بازی روی دسته‌های مختلفی از گراف‌ها، نظیر درخت‌ها، گراف‌های تک‌دور^{۳۵}، گراف‌های برون‌مسطح، گراف‌های بازه‌ای

و شبکه‌ها بررسی شده است که در زیر برخی از مهم‌ترین نتایج به دست آمده را می‌بینیم.

قضیه ۱۲-۱۴ ([Tan04]) برای هر درخت T داریم $bcn(T) \in O(\log n)$ و محاسبه $bcn(T)$ در زمان $O(n^2)$ ممکن است.

35) unicyclic

قضیه ۱۳-۱۴ ([Tan04]) اگر G گرافی بازه‌ای باشد، آن گاه $bcn(G) = \lceil \omega(G)/2 \rceil$.

قضیه ۱۴-۱۴ ([Tan04]) اگر $a \leq b$ آن گاه $bcn(G_{a,b}) \leq \lfloor a/2 \rfloor + 1$.

در مورد زمان جستجوی گراف‌ها در این گونه در [ADHY08] می‌توانید نتایجی پیدا کنید.

تعمیمی که از این گونه وجود دارد بدین صورت است که فرض می‌شود اگر دزد در فاصله r یا کم‌تر از مأموری قرار گرفت، مکان دزد بر پلیس روشن می‌شود یا به عبارت دیگر هر مأمور تا فاصله r حول خودش را می‌بیند. این تعمیم در خود [Tan04] و همچنین در [Jel06] مطالعه شده است.

۱۵ استراتژی‌های تصادفی

در قسمت قبل دیدیم که عدد کاوش K_3 برابر ۲ است. حال فرض کنید یک مأمور روی K_3 بدین ترتیب حرکت می‌کند: در هر دور به طور تصادفی یک رأس انتخاب می‌کند و به آن حرکت می‌کند، به طوری که دزد به مولد دنباله تصادفی مأمور دسترسی ندارد. در این صورت به راحتی می‌توان دید که دزد هر دنباله‌ای از حرکات را انجام دهد به احتمال ۱ دستگیر خواهد شد. حتی اگر به دزد اجازه دهیم که او نیز از یک مولد تصادفی برای انتخاب حرکاتش بهره بگیرد باز به احتمال ۱ دستگیر می‌شود. به نظر می‌رسد این مدل طبیعی‌تر از مدل ارائه شده در قسمت قبل باشد زیرا فرض در اختیار داشتن یک مولد تصادفی برای پلیس فرض عجیبی نیست. در این قسمت ابتدا تعریف دقیق این مدل ارائه خواهد شد و سپس نتایج مهمی که در رابطه با آن به دست آمده مرور می‌شوند.

در گونه‌ای که به تعقیب و گریز تصادفی^{۳۶} شهرت دارد، دو بازیکن پلیس (شامل c مأمور) و دزد روی یک گراف G بازی می‌کنند. در ابتدا مأمورین و دزد روی رئوس دلخواهی از گراف قرار می‌گیرند. در هر دور، هر دزد تا شعاع r حول خودش را می‌بیند و در صورتی که مأمور یا مأمورینی در فاصله r یا کم‌تر از او باشند مکانشان بر دزد مشخص می‌شود. سپس دزد تصمیم می‌گیرد که در این دور به چه احتمالی به کدام رأس مجاور حرکت کند یا در رأس فعلی بماند. مأمورین همیشه از مکان یک‌دیگر اطلاع کامل دارند و با هم هماهنگ هستند. اگر دزد در فاصله r یا کم‌تر از مأموری قرار گرفت، مکان دزد بر پلیس آشکار می‌شود. سپس پلیس تصمیم می‌گیرد که در این دور به چه احتمالی چه حرکتی را انجام دهد. حرکات مشابه قبل هستند یعنی هر مأموری در رأس خودش می‌ماند یا به رأس مجاور حرکت می‌کند. تنها تفاوت این است که حرکات به صورت قطعی انجام نمی‌شوند بلکه با یک توزیع احتمال انجام می‌شوند. وقتی دزد و پلیس هر دو تصمیم خود را گرفتند، هم‌زمان حرکت خود را انجام می‌دهند. هم‌زمانی بدین معناست که مثلاً اگر دزد در u بود و مأموری در v بود و $u \sim v$ و دزد تصمیم گرفت که به v برود و مأمور تصمیم گرفت به u برود، در پایان این دور هر دو به مقصد خود رسیده‌اند و مأمور، دزد را دستگیر نکرده است. دستگیری وقتی رخ می‌دهد که در پایان یک دور، مأموری با دزد در یک رأس قرار بگیرد. برخی از مقالاتی که این گونه را بررسی کرده‌اند (مثل [ARSSV02] و [IKK06]) آن را بازی شکارچی-خرگوش^{۳۷} نامیده‌اند.

تعریف (عدد جستجوی تصادفی با شعاع دید r و متوسط زمان جستجوی c مأمور با شعاع دید r) $(est_c^r(G))$ در این گونه می‌گوییم c مأمور می‌توانند دزد را دستگیر کنند هرگاه یک استراتژی تصادفی برای مأمورین پلیس وجود داشته باشد که دزد هر استراتژی تصادفی که داشته باشد به احتمال ۱ دستگیر شود. عدد جستجوی گراف G با شعاع دید r را برابر

36) randomized pursuit evasion 37) hunter-rabbit

کمترین تعداد مأمور لازم تعریف می‌کنیم و با $rcn^r(G)$ نمایش می‌دهیم. برای یک استراتژی برای پلیس مانند S ، امید ریاضی تعداد دورهای بازی در حالتی که دزد از بهترین استراتژی فرار علیه S استفاده کند را با $est_c^r(G, S)$ نشان می‌دهیم. در نهایت، متوسط زمان جستجوی گراف G با c مأمور با شعاع دید r را برابر مینیمم $est_c^r(G, S)$ برای همه استراتژی‌های S تعریف می‌کنیم و با $est_c^r(G)$ نمایش می‌دهیم. \triangle

این گونه نخستین بار در [ARSSV02] برای حالت شعاع دید صفر مطالعه شد و نتیجه بسیار جالب زیر ثابت شد:

قضیه ۱-۱۵ ([ARSSV02]) برای هر G داریم $rcn^0(G) = 1$ و $est_1^0(G) \in O(n \log \text{diam}(G))$

اثبات قضیه بالا مبتنی بر قضیه زیر است که اثباتی بسیار هوشمندانه دارد:

قضیه ۲-۱۵ ([ARSSV02]) برای هر n داریم $rcn^0(C_n) = 1$ و $est_1^0(C_n) \in O(n \log n)$

در [ARSSV02] این پرسش مطرح شده که آیا برای هر G لاقل $\Omega(n \log \text{diam}(G))$ حرکت لازم است و به آن پاسخ منفی داده شده است:

قضیه ۳-۱۵ ([ARSSV02]) اگر G یک درخت دودویی کامل باشد، آن گاه $est_1^0(G) \in O(n)$

در مرجع بالا هم‌چنین بازی روی گراف‌های جهت‌دار بررسی شده و ثابت شده که زمان جستجوی متوسط آن‌ها ممکن است رشد توان دویی داشته باشد:

قضیه ۴-۱۵ ([ARSSV02]) (۱) فرض کنید G یک گراف جهت‌دار قویاً همبند باشد. در این صورت $est_1^0(G) \in O(n^2)$

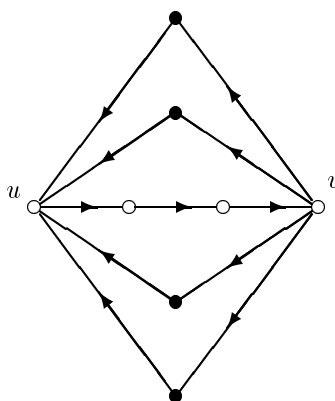
(۲) برای هر n گراف قویاً همبند n رأسی G وجود دارد که $est_1^0(G) \in \Omega(n^2)$

اثبات.

(۱) یک استراتژی برای مأمور می‌دهیم و این شرط را اضافه می‌کنیم که فقط در صورتی دزد دستگیر می‌شود که در پایان دور k, n ، برای یک عدد صحیح k ، دزد و مأمور در یک رأس قرار بگیرند. واضح است کران بالایی که با این شرط ارائه شود، کران بالایی برای حالت کلی نیز است. مأمور بدین صورت حرکت می‌کند: در ابتدا در یک رأس دلخواه قرار می‌گیرد. سپس یک رأس را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت انتخاب می‌کند، به آن رأس می‌رود و تا پایان دور n در همان رأس به کمین دزد می‌نشیند. احتمال این که دزد در پایان دور n در این رأس باشد برابر $1/n$ است. پس به احتمال $1/n$ دزد در دور n دستگیر می‌شود. اگر دزد دستگیر نشده بود، مأمور یک رأس دیگر با توزیع یکنواخت انتخاب می‌کند، به آن رأس می‌رود و تا پایان دور $2n$ در آن رأس به کمین دزد می‌نشیند. احتمال این که دزد در دور پایان دور $2n$ در این رأس باشد نیز برابر $1/n$ است. پس اگر دزد در دور n دستگیر نشده باشد، به احتمال $1/n$ در دور $2n$ دستگیر می‌شود. مأمور به همین ترتیب ادامه می‌دهد. او به طور متوسط باید n بار کار به کمین نشستن را انجام دهد تا دزد بالاخره دستگیر شود. چون رفتن به یک رأس تصادفی و به کمین نشستن مجموعاً n حرکت طول می‌کشد، در کل به طور متوسط پس از n^2 حرکت دزد دستگیر می‌شود.

(۲) چون حکم در رابطه با پیدا کردن یک کران پایین مرتبه‌ای (و نه دقیق) برای متوسط تعداد حرکات است، در اثبات آن نیز از جزئیاتی که خللی ایجاد نمی‌کنند صرف‌نظر می‌کنیم، مثلاً از گذاشتن سقف و کف برای $n/2$ صرف‌نظر می‌کنیم. گراف G را

بدین صورت می‌سازیم: یک مسیر جهت‌دار به طول $n/2$ در نظر می‌گیریم. ابتدای این مسیر را u و انتهای آن را v می‌نامیم. سپس $n/2$ مسیر جهت‌دار مجزا به طول ۲ از v به u اضافه می‌کنیم تا G به دست آید. برای $n = 8$ گرافی مشابه شکل ۲۴ پدید می‌آید.



شکل ۲۴: گراف مربوط به قضیه ۴-۱۵

دزد به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت به یکی از رئوس سیاه می‌رود و تا آخر بازی همان‌جا می‌ماند. یک مأمور برای سرکشی به رئوس سیاه باید ابتدا به v برود. وقتی از v به یکی از رئوس سیاه رفت مجبور است به u برود و $n/2$ حرکت طول می‌کشد تا دوباره به v برسد. او هر بار که از v به یکی از رئوس سیاه می‌رود به احتمال $2/n$ دزد را دستگیر می‌کند. پس به طور متوسط باید $n/2$ بار مسیر از u به v را طی کند. در نتیجه امید ریاضی تعداد حرکات لازم برای گرفتن دزد از $n^2/4$ کمتر نیست.

□

حالت شعاع دید ۱ در [IKK06] مطرح و مطالعه شده است. توجه کنید که در این حالت دیگر یک مأمور برای هر گرافی کافی نیست زیرا مثلاً اگر بازی روی یک دور به طول بیش از سه انجام شود، دزد می‌تواند صبر کند تا مأمور به رأس مجاورش برسد، و وقتی او را دید به دیگر رأس مجاور خود فرار کند و بدین ترتیب هرگز دستگیر نمی‌شود. ولی در کمال تعجب ثابت شده که دو مأمور برای هر گرافی کافی است:

قضیه ۵-۱۵ ([IKK06]) برای هر G داریم $rcn^1(G) \leq 2$ و $est_1(G) \in O(n^5)$.

استراتژی ارائه شده برای پلیس جالب است و به نظر می‌رسد کران زمان جستجوی ارائه شده تنگ نیست و می‌توان آن را بهبود داد. نویسندگان [IKK06] همچنین الگوریتمی ارائه داده‌اند که تشخیص می‌دهد آیا در یک گراف داده شده می‌توان با یک مأمور دزد را دستگیر کرد:

قضیه ۶-۱۵ ([IKK06]) برای گراف داده شده G می‌توان در زمان چندجمله‌ای تشخیص داد که آیا $rcn^1(G) = 1$ یا خیر.

آن‌ها همچنین ثابت کردند که برای $r > 1$ دیگر تعداد مأمورین لازم برای همه گراف‌ها ثابت نیست:

قضیه ۷-۱۵ ([IKK06]) برای هر n به قدر کافی بزرگ، گراف G وجود دارد که $rcn^2(G) \in \Omega(\sqrt{n}/\log n)$

نویسندگان [IK08] در این باره مطالعه کردند که آیا پلیس می‌تواند یک استراتژی انتخاب کند که به احتمال ۱ منجر به دیده شدن دزد بشود یا خیر و دیدند که پاسخ مثبت است:

قضیه ۸-۱۵ ([IK08]) برای هر $r > 0$ در حالت شعاع دید r ، یک مأمور می‌تواند طوری حرکت کند که به احتمال ۱ پس از مدتی دزد در دیدرس‌اش قرار بگیرد.

۱۶ گونه‌های دیگر

گونه‌های مختلف دیگری از بازی دزد و پلیس مطرح شده که در این‌جا به اختصار به هر یک اشاره‌ای می‌شود و مرجعی برای مطالعه آن معرفی می‌شود. ابتدا به گونه‌هایی می‌پردازیم که نوعی محدودیت برای حرکت دزد و مأمورین وجود دارد. گونه‌ای که هر یک از مأمورین مجبور است از یال‌های زیرگراف خاصی برای حرکت استفاده کند در [Cla02] بررسی شده است. گونه‌ای که در آن دو مأمور وجود دارند و در هر دور فاصله بین این دو مأمور باید حداکثر یک باشد، در [CN05a] و [CN05b] مطالعه شده است. گونه‌ای که در آن دزد و پلیس روی دو مجموعه یال مجزا از هم (ولی مجموعه رئوس یکسان) حرکت می‌کنند در [NN93] مورد بررسی قرار گرفته است. برای سه گونه بالا می‌توان از همان الگوریتم ارائه شده برای گونه اصلی (قضیه ۱-۱۱) با اندکی تغییر برای محاسبه زمان جستجو استفاده نمود.

در گونه‌های زیر، تعریف دستگیری نسبت به بازی اصلی متفاوت است.

گونه‌ای که در آن دزد در صورتی دستگیر می‌شود که یکی از مأمورین به فاصله حداکثر d از او برسد در [BCP] بررسی شده است. در گونه استفاده پلیس از تله، پلیس ابتدا تعدادی تله در برخی رئوس کار می‌گذارد و سپس بازی آغاز می‌شود. در طول بازی هرگاه دزد به راسی برود که تله‌ای در آن است، دستگیر می‌شود و بازی خاتمه می‌یابد. برای اطلاعات بیشتر [CN01] را ببینید. و نهایتاً در گونه‌های زیر دزد اساساً نامرئی است و تحت شرایط خاصی اطلاعاتی از دزد در اختیار پلیس قرار می‌گیرد. تمام اطلاعات بازی همواره بر دزد روشن است.

در گونه‌ای که در [Cla08] معرفی شده، پلیس هر T دور یک بار از مکان دزد مطلع می‌شود. در گونه استفاده پلیس از رادار که در [CN00] و [Jel06] مطالعه شده، پلیس تعدادی رادار روی برخی از یال‌ها قرار می‌دهد به طوری که هرگاه دزد از یک یال دارای رادار عبور کرد، این اتفاق و جهت حرکت دزد به پلیس اطلاع داده می‌شود. در گونه استفاده پلیس از دوربین، تعدادی دوربین در برخی از رئوس نصب شده‌اند به طوری که هرگاه دزد وارد یکی از این رئوس شد پلیس از مکان او آگاه می‌شود و به علاوه وقتی دزد از رأس دوربین‌داری خارج شد، پلیس از یالی که از آن خارج شده نیز مطلع می‌شود. اطلاعات بیشتر درباره این گونه را در [Cla02] و [Jel06] می‌توانید پیدا کنید. در گونه استفاده پلیس از زنگ خطر که در [CC06] و [Jel06] می‌توانید نتایج به دست آمده درباره آن را ببینید، پلیس تعدادی زنگ خطر در رئوس (یا یال‌های) گراف قرار می‌دهد و چنانچه دزد وارد این رئوس بشود (یا از یال‌های زنگ خطر دار عبور کند) پلیس از این موضوع مطلع می‌شود بدون این که اطلاعی در مورد جهت حرکت دزد به دست آورد.

نتیجه‌گیری

۱۷ جمع‌بندی

همان طور که دیدیم این بازی در سال ۱۹۷۸ تعریف شده، با این حال بسیاری از نتایج مهم به دست آمده مربوط به سال‌های اخیر هستند. این موضوع نشان می‌دهد که در این سال‌ها روی این مبحث زیاد کار اساسی نشده و رسیدن به نتایج جدید خیلی مشکل نیست. در سال ۲۰۰۸ بازی برای نخستین بار روی گراف‌های تصادفی نیز بررسی شده و پس از آن مقالات متعددی در این رابطه نوشته شده‌اند. (برای اطلاع از خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده درباره آن‌ها [BPW09] را ببینید.) لذا کار روی گراف‌های تصادفی نیز کاری جالب خواهد بود و احتمالاً به نتایجی خواهد انجامید. بازی روی گراف‌های جهت‌دار نیز خیلی کم بررسی شده و این موضوع نیز می‌تواند ایده‌ای برای پژوهش باشد.

اثبات‌های نتایج به دست آمده درباره پیچیدگی محاسبه عدد جستجو بسیار هوشمندانه هستند و این موضوع نشان می‌دهد که رسیدن به نتایج جدیدتر احتمالاً مشکل خواهد بود. در رابطه با یافتن کران برای عدد جستجو، به نظر من مطالعه عمیق‌تر مفهوم انقباض می‌تواند مفید باشد. یک ایده این است که برای گراف داده شده G ، یک گراف H بسازیم که به صورت حاصل‌ضرب چند گراف ساده باشد و G را به نوعی در H بنشانیم، به طوری که عدد جستجوی H کران بالایی برای عدد جستجوی G باشد. در مورد گراف‌های ۱-جستجوپذیر به نظر می‌رسد نکته تاریکی وجود ندارد، ولی حتی مطالعه گراف‌های ۲-جستجوپذیر می‌تواند جالب باشد. روی زمان جستجوی گراف‌ها کلاً مطالعه چندانی انجام نشده است، و کار روی محاسبه زمان جستجوی گراف‌های خاص (مثلاً گراف‌های حاصل‌ضرب) می‌تواند مفید باشد.

روی گونه‌های دزد سریع‌تر و دزد نامرئی افراد زیادی کار نکرده‌اند، و احتمالاً با مطالعه بیشتر می‌توان نتایج بسیاری را به دست آورد. گونه استراتژی‌های تصادفی نیاز به شهود احتمالاتی زیادی دارد و به سادگی دو گونه قبل نیست.

۱۸ مسائل باز

(۱) از قضیه ۱-۳ می‌دانیم مسئله محاسبه $cn(G)$ مسئله‌ای NP-hard است. در [GR95] حدس زده شده که این مسئله EXP-complete است.

(۲) آیا الگوریتم تقریبی با ضریب $n^{1-\epsilon}$ برای محاسبه $cn(G)$ وجود دارد؟ [FGK08]

(۳) تابع $nc(c)$ را برابر تعداد رئوس کوچک‌ترین گرافی تعریف می‌کنیم که عدد جستجوی آن لااقل c است. درباره این تابع می‌دانیم $nc(2) = 4$, $nc(3) = 10$. این تابع چه خواصی دارد و رشد آن چگونه است؟ [GR95]

(۴) شاید مهم‌ترین مسئله این بازی (از نظر ریاضی) رفتار مجانبی $cn(n)$ باشد. می‌دانیم $cn(n) \in O(n/\log n) \cap \Omega(\sqrt{n})$ که فاصله زیادی بین این دو کران وجود دارد، لذا حتی یافتن کرانی مثل $O(n^{1-\epsilon})$ برای یک ϵ ثابت یک پیشرفت بزرگ است.

[BKL]

- (۵) اگر $G \not\cong K_m$ آن گاه در مورد $cn(G)$ چه می توان گفت؟ با توجه به قضیه ۲-۴، پیدا کردن کرانی برای $cn(G)$ در این حالت می تواند منجر به یافتن کران بالایی برای $cn(n)$ بشود. [BKL]
- (۶) ساختار گراف های جهت دار ۱-جستجوپذیر به چه صورت است؟ [Hah07]
- (۷) ساختار گراف های متناهی ۱-جستجوپذیر مشخص شده است (قضیه ۲-۶ را ببینید). درباره گراف های نامتناهی چگونه می توان ۱-جستجوپذیر بودن آن ها را تعیین کرد؟ [HLSW02]
- (۸) از قضیه های ۱-۱۲ و ۶-۱۲ می دانیم $n^{c+1} \geq st_c(n) \geq n/2 + a_c$ آیا می توان این دو کران را بهبود بخشید؟
- (۹) چه ارتباطی بین پارامترهای گراف و زمان جستجوی گراف وجود دارد؟ در حالت کلی پاسخ گویی به این پرسش سخت به نظر می رسد، ولی در مورد گراف های خاص شاید بتوان به آن پاسخ داد. [Hah07]
- (۱۰) آیا ممکن است برای s های بزرگ، مثلاً $s > \sqrt{n}$ ، محاسبه $cn^s(G)$ در NP باشد؟ [FGK08]
- (۱۱) آیا برای گراف های مسطح G (یا حتی شبکه ها) می توان $cn^1(G)$ را در زمان چندجمله ای محاسبه کرد؟ [FGKNS]
- (۱۲) پیچیدگی مسئله محاسبه $bcn(G)$ چیست؟ در [Tan04] حدس زده شده که این مسئله NP-hard است.
- (۱۳) ساختار گراف هایی که c -کاوش پذیر هستند چگونه است؟ [Jel06]
- (۱۴) اگر T یک درخت باشد، الگوریتمی برای محاسبه $bcn(T)$ با زمان اجرای $o(n^2)$ ارائه دهید. (قضیه ۱۲-۱۴ را ببینید). [Tan04]
- (۱۵) اگر G گرافی تک دور باشد، الگوریتمی برای محاسبه $bcn(G)$ ارائه دهید. [Tan04]
- (۱۶) اگر H زیرگرافی القایی از G باشد آیا داریم $bcn(H) \leq bcn(G)$ ؟ (قضیه ۵-۱۴ را نیز ببینید). [Tan04]
- (۱۷) از قضیه ۱۰-۱۴ می دانیم $bcn(G) \leq pw(G) + 1$ در کمال تعجب گرافی که برای آن تساوی رخ بدهد پیدا نشده است. آیا می توان این نامساوی را بهبود داد و یا کران پایینی برای $bcn(G)$ برحسب $pw(G)$ پیدا کرد؟ [Tan04]
- (۱۸) اگر $a \leq b$ آن گاه قضیه ۱۴-۱۴ می گوید $bcn(G_{a,b}) \leq 1 + \lfloor a/2 \rfloor$ در [Tan04] حدس زده شده که تساوی برقرار است.
- (۱۹) از قضیه ۵-۱۵ داریم که برای هر G ، $est^1(G) \in O(n^5)$. آیا می توان این کران را بهبود داد؟
- (۲۰) اگر برای گراف G داشته باشیم $cn^1(G) = 1$ ، آن گاه آیا $est^1(G)$ کرانی چندجمله ای دارد؟ [IKK06]

- [ADHY08] B. Alspach, D. Dyer, D. Hanson and B. Yang, *Time constrained graph searching*, Theoret. Comput. Sci. **399** (2008), 158–168.
- [AF84] M. Aigner and M. Fromme, *A game of cops and robbers*, Discrete Appl. Math. **8** (1984), 1–12.
- [AF88] R. P. Anstee and M. Farber, *On bridged graphs and cop-win graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **44** (1988), 22–28.
- [Als04] B. Alspach, *Searching and sweeping graphs: a brief survey*, Matematiche (Catania) **59** (2004), 5–37.
- [And86] T. Andreae, *On a pursuit game played on graphs for which a minor is excluded*, J. Combin. Theory Ser. B **41** (1986), 37–47.
- [ARSSV02] M. Adler, H. Räcke, N. Sivadasan, C. Sohler and B. Vöcking, *Randomized pursuit-evasion in graphs*, Combin. Probab. Comput. **12** (2003), 225–244.
- [BCP] A. Bonato, E. Chiniforooshan and P. Prałat, *Cops and robbers from a distance*, preprint (2009), available at http://www.math.ryerson.ca/~abonato/distcops_bcp030109.pdf.
- [BGHK] A. Bonato, P. Golovach, G. Hahn and J. Kratochvíl, *The search-time of a graph*, preprint (2009), available at <http://www.math.ryerson.ca/~abonato/searchtime.pdf>.
- [BHT] A. Bonato, G. Hahn and C. Tardif, *Large classes of infinite k -cop-win graphs*, preprint, available at http://www.math.ryerson.ca/~abonato/infcops_bht030109.pdf.
- [BHW07] A. Bonato, G. Hahn and C. Wang, *The cop density of a graph*, Contrib. Discrete Math. **2** (2007), 133–144.
- [BI93] A. Berarducci and B. Intrigila, *On the cop number of a graph*, Adv. in Appl. Math. **14** (1993), 389–403.
- [BKL] B. Bollobás, G. Kun and I. Leader, *Cops and robbers in a random graph*, preprint (2008), available at <http://arxiv.org/pdf/0805.2709>.
- [BPW09] A. Bonato, P. Prałat and C. Wang, *Pursuit-evasion in models of complex networks*, Internet Math. **4** (2009), 419–436.
- [Cam03] P. J. Cameron, *Projective and affine planes*, from: The Encyclopaedia of Design Theory, <http://designtheory.org/library/encyc/topics/>, May 2003.
- [CC06] N. E. Clarke and E. L. Connon, *Cops, robber, and alarms*, Ars Combin. **81** (2006), 283–296.

- [Chi08] E. Chiniforooshan, *A better bound for the cop number of general graphs*, J. Graph Theory **58** (2008), 45–48.
- [Cla02] N. E. Clarke, *Constrained cops and robber*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, 2002.
- [Cla08] N. E. Clarke, *A witness version of the cops and robber game*, Discrete Math. **309** (2008), 3292–3298.
- [CN00] N. E. Clarke and R. J. Nowakowski, *Cops, robber, and photo radar*, Ars Combin. **56** (2000), 97–103.
- [CN01] N. E. Clarke and R. J. Nowakowski, *Cops, robber, and traps*, Util. Math. **60** (2001), 91–98.
- [CN05a] N. E. Clarke and R. J. Nowakowski, *A tandem version of the cops and robber game played on products of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **25** (2005), 241–249.
- [CN05b] N. E. Clarke and R. J. Nowakowski, *Tandem-win graphs*, Discrete Math. **299** (2005), 56–64.
- [Die05] R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, electronic edition 2005, available at <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/>.
- [FGK08] F. V. Fomin, P. A. Golovach and J. Kratochvíl, *On tractability of cops and robbers game*, in: Proc. 5th IFIP International Conference on Theoretical Computer Science (TCS 2008), Springer-Verlag IFIP International Federation for Information Processing, vol. 237, 2008, pp. 171–185.
- [FGKNS] F.V. Fomin, P.A. Golovach, J. Kratochvíl, N. Nisse, K. Suchan, *Pursuing fast robber in graph*, preprint.
- [Fr87a] P. Frankl, *On a pursuit game on Cayley graphs*, Combinatorica **7** (1987), 67–70.
- [Fr87b] P. Frankl, *Cops and robbers in graphs with large girth and Cayley graphs*, Discrete Appl. Math. **17** (1987), 301–305.
- [FT08] F. V. Fomin, D. M. Thilikos, *An annotated bibliography on guaranteed graph searching*, Theoret. Comput. Sci. **399** (2008), 236–245.
- [Gav08] T. Gavenciak, *Cop-win graphs with maximal capture-time*, preprint (2008), available at <http://home.zcu.cz/~Eholubpre/WWW-KMA/students/t4.pdf>.
- [GR95] A. S. Goldstein and E. M. Reingold, *The complexity of pursuit on a graph*, Theoret. Comput. Sci. **143** (1995), 93–112.
- [Hah07] G. Hahn, *Cops, robbers and graphs*, Tatra Mt. Math. Publ. **36** (2007), 163–176.
- [HLSW02] G. Hahn, F. Laviolette, N. Sauer and R. E. Woodrow, *On cop-win graphs*, Discrete Math. **258** (2002), 27–41.

- [HMG06] G. Hahn and G. MacGillivray, *A note on k -cop, l -robber games on graphs*, Discrete Math. **306** (2006), 2492–2497.
- [HN04] P. Hell and J. Nešetřil, *Graphs and homomorphisms*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [IKK06] V. Isler, S. Kannan and S. Khanna, *Randomized pursuit-evasion with local visibility*, SIAM J. Discrete Math. **20** (2006), 26–41.
- [IK08] V. Isler and N. Karnad, *The role of information in the cop-robber game*, Theoret. Comput. Sci. **399** (2008), 179–190.
- [Jel06] D.V. Jeliaskova, *Aspects of the cops and robber game played with incomplete information*, M.Sc. Thesis, Acadia University, 2006.
- [JKT] G. Joret, M. Kamiński and D. O. Theis, *The cops and robber game on graphs with forbidden (induced) subgraphs*, preprint (2008), available at <http://arxiv.org/abs/0804.4145>.
- [NN93] S. Neufeld and R. Nowakowski, *A vertex-to-vertex pursuit game played with disjoint set of edges*, in: Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, Proc. NATO Advanced Study Institute, Banff, Canada, April 21–May 4, 1991, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993, pp. 299–312.
- [NN98] S. Neufeld and R. Nowakowski, *A game of cops and robbers played on products of graphs*, Discrete Math. **186** (1998), 253–268.
- [NS08] N. Nisse and K. Suchan, *Fast robber in planar graphs*, in: Proc. 34th Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2008), Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, pp. 312–323.
- [NT] S. Norin and R. Thomas, *K_t minors in large t -connected graphs*, in preparation.
- [NW83] R. Nowakowski and P. Winkler, *Vertex-to-vertex pursuit in a graph*, Discrete Math. **43** (1983), 235–239.
- [Pra] P. Prałat, *When does a random graph have constant cop number?*, preprint, available at <http://www.mathstat.dal.ca/~pralat/papers/cop-win.pdf>.
- [Qui78] A. Quilliot, *Jeux et Points Fixes sur les graphes*, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1978.
- [RW09] T. Rowland and E. W. Weisstein, *Group*, from: MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/Group.html>, June 2009.
- [Sch01] B. S. Schroeder, *The copnumber of a graph is bounded by $\lceil 3/2 \text{genus}(G) \rceil + 3$* , Trends. Math. (2001), 243–263.

- [SW09] J. Sondow and E. W. Weisstein, *Bertrand's postulate*, from: MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/BertrandsPostulate.html>, June 2009.
- [Tan04] A. Tang, *Cops and robber with bounded visibility*, M.Sc. Thesis, Dalhousie University, 2004.
- [Tos88] R. Tošić, *On cops and robber game*, *Studia. Sci. Math. Hungar.* **23** (1988), 225–229.
- [Wik09] Wikipedia, *List of complexity classes*, from: Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_complexity_classes&oldid=292901048, May 2009.

Abstract

Graph searching problems are usually described as a game played in a graph between a set of cops and an escaping robber. The cops aim for capturing the robber while she tries to evade forever. These kinds of games, also known as pursuit-evasion games, has a number of applications in fields such as control theory, robotics, sensor networks and network security. There is also pure theoretical interest in studying these games, as a few deep relations with important graph parameters such as treewidth has been found.

Variants of the game are generated by restricting the speed and location of the players (on edges or just on vertices), the definition of capture, information available to the players; many of which has been studied in the literature. The important parameters in each variant are the minimum number of cops and the minimum time required to capture the robber. Note that the cops' strategy should be guaranteed, i.e. they should capture the robber regardless of what she does. The survey [FT08] overviews and provides references for most of the variants. The variant studied in this thesis is called the *cops and robber game*. The distinctive properties of this variant are that, first, the robber has a limited speed, and second, the players move at alternate ticks of a clock. This game has first been studied in 1978 and has become popular in the recent years.

Two recent surveys has been written on this topic, namely [Als04] and [Hah07]. This thesis includes the classical important results as well as the newest published results. It also contains several results regarding some variants of the game. I hope that it helps to introduce the fun and easy-to-learn cops and robber game which is related to several graph parameters to the Iranian students community, and commences further research on the topic.



Sharif University of Technology

Department of Computer Engineering

B. Sc. Thesis

Title:

A survey on the classical cops and robber game and other variants

By:

Abbas Mehrabian

Supervisor:

Dr. MohammadAli Safari

July 2009